Критерии оценивания, задания и ответы к заданиям МЭ ВсОШ

по математике

2023-2024 учебный год

11 класс

1. Найти максимальный член последовательности $a_n = -n^2 + 14n - 45 + \frac{4}{(2n-17)^2+2}$, $n = 1; 2; 3 \dots$.

Решение

Функция $a_n(n) = -n^2 + 14n - 45 + \frac{4}{(2n-17)^2+2}$, является функцией натурального аргумента, представляющая собой сумму квадратичной $b_n(n) = -n^2 + 14n - 45$ и дробно-рациональной $c_n(n) = \frac{4}{(2n-17)^2+2}$ функций. Функция $b_n(n)$ принимает наибольшее значение равное 4 при $n = 7$. Функция $c_n(n)$ принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя, т.е. при $n = 8$ или $n = 9$. Таким образом, максимальное значение a_n достигается при $n = 7$ или $n = 8$.

$$a_n(7) = 4\frac{4}{11};\ a_n(8) = 4\frac{1}{3}.$$

Максимальный член последовательности $a_7 = 4\frac{4}{11}$.

Критерии оценивания

Выполнено преобразование квадратного трехчлена, его оценка, оценка дробно-рационального слагаемого и оценка выражение в целом (функции в рассмотрение не вводятся) и получен верный ответ – 7 баллов.

Ответ получен перебором натурального значения аргумента – 0 баллов.

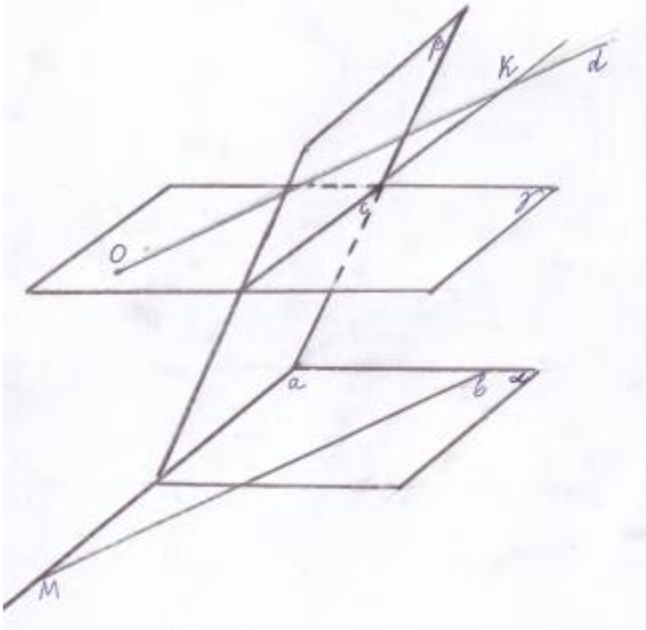
Допущены арифметические ошибки – 5-6 баллов.

Не полностью выполнена оценка функций (выражений), то есть решение нельзя считать полным – 2-4 балла.

2. Плоскости α и β пересекаются по прямой a. В плоскости α взята прямая b, не параллельная прямой a. Точка О не лежит ни в плоскости α, ни в плоскости β. Плоскость γ, проходящая через точку О, параллельно плоскости α, пересекает плоскость β по прямой c. Постройте прямую, по которой пересекаются плоскость β и плоскость, заданная прямой b и точкой О.

Решение

1. Прямые a и b пересекаются в точке М. Точка М является общей точкой плоскости β и плоскости, заданной прямой b и точкой О.



2. Через точку О проведем прямую d, параллельную прямой b. Обозначим за К точку пересечения прямой d с прямой c. Прямые c и d пересекаются, поскольку они лежат в одной плоскости (прямая d лежит в плоскости γ, так как плоскость, заданная прямой b и точкой О пересекает параллельные плоскости α и γ по параллельным прямым, а через точку, не лежащую на прямой, можно провести единственную прямую ей параллельную) и не параллельны (поскольку прямые a и b не параллельны).

3. Точка К является общей точкой плоскости β и плоскости, заданной прямой b и точкой О, поскольку точка К лежит на прямой d, которая лежит в плоскости, заданной прямой b и точкой О, и точка К лежит на прямой c, которая лежит в плоскости β.

4. Прямая МК является искомой.

Критерий оценивания

Значимым в содержании решения является обоснование положения искомой прямой относительно объектов, заданных в условии. То есть в решении необходимо показать, что искомая прямая проходит через точку пересечения прямых a и b и через точку пересечения прямой c и прямой, проходящей через точку О параллельно прямой b. Решение, в котором эти факты отсутствуют, оценивается в 0 баллов. Если в решении эти факты присутствуют, но они не обоснованы, то решение оценивается в 2 балла.

3. У робота Васи есть одна конфета и неограниченное количество конфет в отдельном мешке. Вася сам с собой играет в игру. Он подбрасывает монетку и, если выпадает решка, то Вася свою конфету перекладывает в мешок, а, если выпадает орел, то Вася из мешка берет одну конфету. Если у Васи не остается конфет, то игра заканчивается (Вася проиграл). Вася готов играть в эту игру бесконечно. Какова вероятность, что эта игра никогда не закончится? (Выпадение каждой грани монеты равновозможно).

Решение

Найдем вероятность проигрыша $P=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Q$, где 1/ 2 – вероятность проигрыша при первом шаге, Q– вероятность проигрыша при последующих шагах. При этом $Q=P^2$ как произведение вероятности попасть из позиции 2 в позицию 1 и вероятности попасть из позиции 1 в позицию 0. Получаем уравнение $P=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P^2$, решением которого является $P=1$. Значит, искомая вероятность равна 0.

Критерий оценивания

Составление верной математической модели задачи (в приведенном решении математической моделью является уравнение $P=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P^2$) – 6 баллов.

Продвижение к модели ($P=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}Q$), где описано, вероятностью какого события является Q, – 3 балла.

Продвижение, заключающееся в нахождении дополняющего события «проигрыш в игре» к событию «игра не закончится никогда», оценивается в 1 балл.

Только вывод о том, что вероятность выпадения орла (решки) при подбрасывании монеты равна ½ оценивается в 0 баллов.

4. Найдите все целые решения уравнения или докажите, что их нет.

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=(13m+5)^2$$

$[n]$ – целая часть числа n: наибольшее целое число, не превосходящее n.

Решение

Представим $n=12k+r$, где $0\le r\le 11$, r – натуральное, k – целое. Тогда

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=\left[\frac{12k+r}{2}\right]+\left[\frac{12k+r}{3}\right]+\left[\frac{12k+r}{4}\right]=$$

$$=6k+\left[\frac{r}{2}\right]+4k+\left[\frac{r}{3}\right]+3k+\left[\frac{r}{4}\right]=13k+\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]$$

Наибольшее свое значение выражение $\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]$ принимает при $r=11$ и оно равно 10.

Тогда получаем, что при любом целом k и при любом натуральном r с условием $0\le r\le 11$ значение выражения $13k+\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]$ при делении на 13 не дает остатки 11 или 12.

Значение выражения $(13m+5)^2=13\times(13m^2+10m+1)+12$ при любом целом m при делении на 13 дает остаток 12.

Поэтому данное уравнение не имеет целых решений.

Критерий оценивания

Предложено число n представить с учетом остатка от деления на НОК(2,3,4), то есть, например $n=12k+r$, где $0\le r\le 11$, r – натуральное, k – целое, и обоснован результат: при любом целом значении n число, получаемое как значение выражения $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$, представляется в виде суммы числа, кратного 13, а также числа, получаемого как значение выражения $\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]$ - 3 балла.

Дана верная оценка наибольшему значению выражения $\left[\frac{r}{2}\right]+\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]$ – 2 балла.

Показано, что $(13m+5)^2$ при делении на 13 дает остаток 12 – 1 балл.

На основании полученных результатов сделан вывод о том, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$ не равно $(13m+5)^2$ ни при каких целых значениях n и m - 1 балл.

Все баллы суммируются.

5. Имеется 11 множеств, пересечение которых пусто, при этом пересечение любых десяти из них не пусто. Найдите наименьшее количество общих элементов для любых двух множеств.

Решение

Пусть найдутся два множества, у которых нет общих элементов. Но тогда пересечение этих двух множеств с восьмью любыми другими множествами пусто, то есть получаем противоречие с условием.
Пусть найдутся два множества, у которых ровно один общий элемент. Среди остальных множеств существует множество, которому этот элемент не принадлежит, иначе этот элемент принадлежит всем множествам, а значит пересечение всех 11 множеств не пусто, что противоречит условию. Пересечение этих трех множеств пусто, значит, их пересечение с любыми 7-ю другими множествами тоже пусто, что противоречит условию.
Пусть найдутся два множества, у которых ровно два общих элемента. Среди остальных множеств есть множество, которому не принадлежит первый элемент, и есть множество, которому не принадлежит второй элемент. Значит, пересечение этих четырех множеств пусто.
Так продолжаем рассуждение до 8-ми общих элементов и показываем, что опять имеет место противоречие с условием.
Для девяти общих элементов у некоторых двух множеств противоречия нет. То есть оценка приводит к тому, что наименьшее количество общих элементов для любых двух множеств есть 9.
Остается составить пример.
Возьмем 11 элементов и составим 11 множеств, каждый раз не беря какой-нибудь элемент. У любых двух множеств 9 элементов будут одинаковыми.
Критерий оценивания
Приведение примера без оценки – 2 балла. Обоснование оценки при отсутствии примера – 5 баллов.