Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2023-2024 учебный год, 11 КЛАСС

Максимальное количество 35 баллов

Задача 11.1

Может ли среднее арифметическое 11 целых чисел равняться 202,3?

Решение

Предположим, что такие числа существуют. Их сумма равна среднему арифметическому этих чисел, умноженному на их количество: $202{,}3\cdot 11 = 2225{,}3$.

Поскольку сумма целых чисел – целое число, получаем противоречие.

Ответ

Не может.

критерии	*баллы*
Верное решение	7

Задача 11.2

На листке записаны числа: 7, 17, 27, ... , 57, 67. Возможно ли вычеркнуть сначала одно число из записанных, потом вычеркнуть ещё два, и напоследок вычеркнуть ещё три числа так, чтобы после каждого вычёркивания сумма оставшихся на доске чисел делилась на 7?

Решение

Заметим, что 7 записанных чисел составляют арифметическую прогрессию, поэтому их сумма делится на 7. Следовательно, для того, чтобы после первого вычёркивания сумма оставшихся чисел делилась на 7, необходимо вычеркнуть число, кратное 7. Кроме того, после трёхкратного вычёркивания должно остаться одно число, которое опять-таки кратно 7. Но среди записанных чисел только одно число (7) кратно 7. Таким образом, выполнить указанные операции невозможно.

Ответ

Нельзя.

критерии	*баллы*
Верное решение	7
Доказано, что в конце должна остаться 7	3
доказано, что первым действием можно вычеркнуть только 7	2
показано, что начальная сумма кратна 7	1

Задача 11.3

Найти все натуральные n и k, при которых 20n+23k=2023.

Решение.

$\boldsymbol{n = \frac{2023-23k}{20}}$ **. (2023 - 23k) ⋮ 20, значит k должно оканчиваться на 1.**

Дальше допускается перебор n = 1, 11, 21, 31 ….

Сократить перебор можно следующим способом. Пусть m – число десятков в числе k. Тогда

$$\boldsymbol{n = \frac{2023-23k}{20} = \frac{2023-23(10m+1)}{20} = \frac{2023-230m-23}{20} = \frac{2000-230m}{20} = 100 - \frac{23m}{2}}$$

Откуда видно, m число чётное, и каждое n на 23 меньше предыдущего

Ответ: (k, n). (1,100), (21, 77), (41, 54), (61, 31), (81, 8)

критерии	*баллы*
Найдены все 5 пар чисел	7
Найдены 4 пары чисел	4
Найдены 3 пары чисел	3
Найдены 2 пары чисел	2
Найдена 1 пара чисел	1

Задача 11.4

Дан выпуклый четырёхугольник *KPET*. Середины сторон *KP* и *ET* обозначим соответственно через *N* и *L*, точку пересечения *KL* и *TN* — через *O*, точку пересечения *PL* и *EN* — через *S*. Доказать, что площадь четырёхугольника *SLON* равна сумме площадей треугольников *PES* и *KOT*.

Решение

Пусть расстояние от точек *K, N* и *P* до прямой *ET* равны h_1, h и h_2.

Тогда $h = \frac{h_1+h_2}{2}$. Пусть длина стороны *ET* равна $2a$. Тогда

$S_{ENT} = ah$, $S_{KTL} = \frac{1}{2}ah_1$ и $S_{PEL} = \frac{1}{2}ah_2$. Поэтому $S_{ENT} = S_{KTL} + S_{PEL}$. Вычитая из обеих частей этого равенства $S_{LES} + S_{LOT}$, получаем требуемое.

критерии	*баллы*
Верное решение	7
Использована аддитивность площади	3
Замечено, что высоты образую трапецию со средней линией	2
Проведены высоты на сторону KP или ET	2

Задача 11.5

На координатной плоскости xOy построить геометрическое место точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют соотношению

$$\big||x|-1\big| + \big||y|-1\big| \le 1$$

Решение:

$$\big||x|-1\big| + \big||y|-1\big| \le 1 \qquad (1)$$

1. **Построим сначала множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют неравенству**

$$|x| + |y| \le 1 \qquad (2)$$

Это множество точек симметрично относительно обеих осей координат, поэтому достаточно рассмотреть, например, случай, когда $x \ge 0, y \ge 0$.

Следовательно, в рассматриваем случае

$$|x| = x, |y| = y.$$

Неравенство (2) имеет вид $x + y \le 1$

Или $0 \le y \le 1 - x$

Геометрическое место точек, координаты которых (x,y) удовлетворяют полученной системе неравенств или, что тоже самое, соотношениям

$$\boldsymbol{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x,}$$

представляет собой треугольник.

Воспользовавшись указанной выше симметрией, получим, что множество точек, координаты которых (x,y) удовлетворяет неравенству (2), есть квадрат (включая границу) (рисунок).

2. **Построим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству**

$$\boldsymbol{|x-1| + |y-1| \le 1} \qquad \textbf{(3)}$$

В общем случае кривая, задаваемая уравнением $\boldsymbol{f(x - x_0, y - y_0) = 0}$,

получается параллельным переносом кривой $\boldsymbol{f(x, y) = 0}$ на $\boldsymbol{|x_0|}$ единиц вправо, если $\boldsymbol{x_0 > 0}$, влево – если $\boldsymbol{x_0 < 0}$, и на $\boldsymbol{|y_0|}$ единиц вверх, если $\boldsymbol{y_0 > 0}$, вниз – если $\boldsymbol{y_0 < 0}$.

Следовательно, множество точек, координаты $\boldsymbol{(x, y)}$ которых удовлетворяют неравенству (3), представляет собой квадрат, смещенный на единицу вправо и на единицу вверх.

3. **Построим, наконец, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному в условии неравенству**

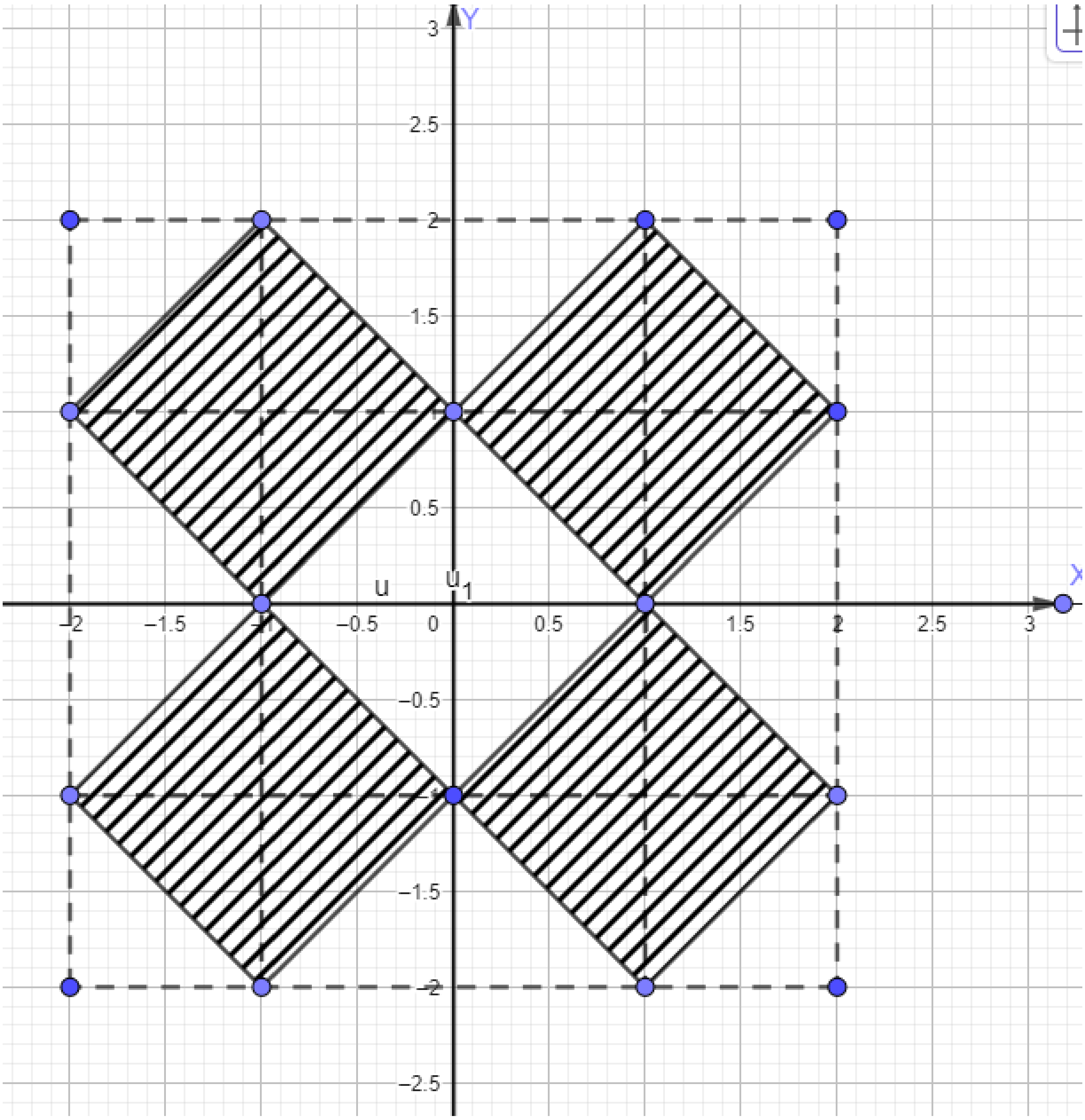
$$\boldsymbol{\big||x| - 1\big| + \big||y| - 1\big| \le 1} \qquad \textbf{(4)}$$

Так как координаты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ входят в это неравенство под знаком модуля, то имеет место симметрия относительно осей Ox и Oy. При $\boldsymbol{x \ge 0}$ и $\boldsymbol{y \ge 0}$ неравенство (4) принимает вид

$$\boldsymbol{|x-1| + |y-1| \le 1}$$

(напомним, что $\boldsymbol{|x| = x}$ при $\boldsymbol{x \ge 0}$ и $\boldsymbol{|y| = y}$ при $\boldsymbol{y \ge 0}$**) и, следовательно, представляет собой квадрат, изображенный на рисунке в 1-ой четверти. Отсюда, воспользовавшись указанной симметрией, строим искомое множество точек.**

Ответ. На рисунке искомое множество точек заштриховано



критерии	*баллы*
Верно построенный график	7
В решение вошла середина креста	5
Построены не все квадраты	3