Критерии и ключи проверки муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников в Республике Карелия в 2023–2024 учебном году по математике

11 класс

№1 (7 баллов). Существует ли такой многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами, что $P(x) \geq 2023 \cdot P'(x)$ для всех x?

Ответ. Да, существует.

Решение. Да, существует. Например, $P(x) = x^2 + 2023^2$.

Тогда

$P'(x) = 2x,$

$P(x) - 2023 \cdot P'(x) = x^2 + 2023^2 - 2x \cdot 2023 = (x - 2023)^2 \geq 0.$

Критерии:

- Приведен только верный ответ или ответ, сопровожденный неверными рассуждениями – 0 баллов.
- Приведён пример и дан верный ответ, но отсутствует обоснование – 5 баллов.
- Полное решение – 7 баллов.

№2 (7 баллов). Друзья Алексей и Павел живут на одной стороне улицы (номер дома Павла больше номера дома Алексея). Алексей решил навестить друга. Выйдя из своего дома, по пути Алексей стал считать сумму номеров домов по своей стороне улицы, включая номер своего дома и дома Павла. В результате у него получилась сумма, равная 391. Какой номер имеет десятый дом, если за первый дом считать дом Алексея?

Ответ. 25.

Решение. Пусть дом Алексея имеет номер *m,* а количество домов на одной стороне улицы до дома Павла равно *n*. По условию $391 = m + (m + 2) + (m + 4) + ... + (m + 2(n - 1)) = (m + n - 1)n$.

Разложение на простые множители числа *391* имеет вид: $391 = 17 \cdot 23$. Так как $m \geq 1$, то $m + n - 1 \geq n$, значит, $m + n - 1 = 23$, а $n = 17$, то есть $m = 7$. Следовательно, число домов, которые прошел Алексей до дома Павла, *17*, а их нумерация начинается с числа *7*. Таким образом, десятый дом имеет номер *25*.

Критерии:

- Получена сумма арифметической прогрессии – 2 балла.
- Задача верно решена для случая, когда разность арифметической прогрессии равна 1 – 5 баллов.
- Полное решение – 7 баллов.

№3 (7 баллов). Сечение куба плоскостью – пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника меньше произведения двух самых длинных его сторон.

Решение. Куб имеет 3 пары параллельных граней, поэтому если сечение – пятиугольник, то он имеет 2 пары параллельных сторон (на рис. 1. $TR \| LF$ и $TK \| RF$). Таким образом, пятиугольник *KTRFL* может быть получен из некоторого параллелограмма *EFRT* (рис. 2) отрезанием треугольника (ΔEKL) прямой, пересекающей две его соседние стороны. Отсюда $S_{KTRFL} < S_{EFRT} = TR \cdot RF \cdot Sin\angle TRF$. Так как значение синуса угла *TRF* не превосходит 1, то $S_{KTRFL} < S_{EFRT} \leq TR \cdot RF$. А произведение длин двух сторон пятиугольника не больше произведения длин двух самых длинных его сторон.

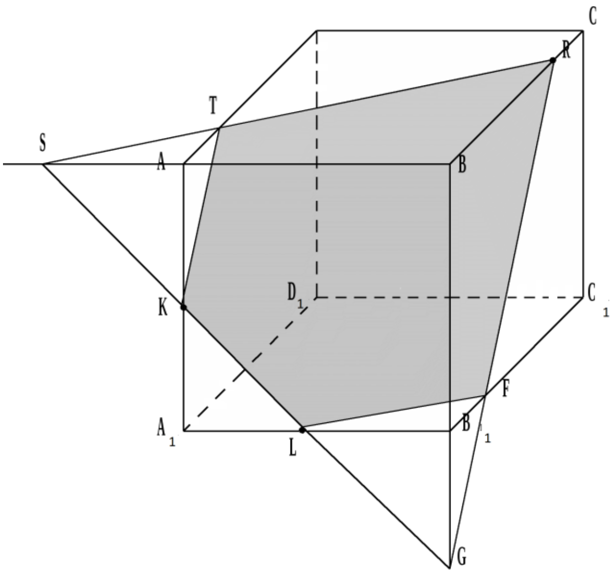

Рис.1

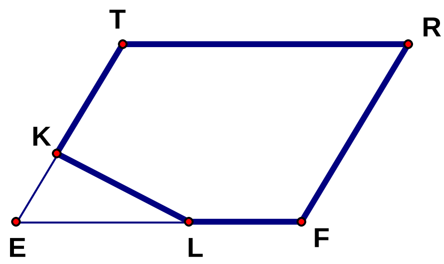

Рис.2

Критерии:

- Определено, что сечение имеет 2 пары параллельных сторон – 1 балл.
- Выполнено сравнение площади сечения с площадью параллелограмма и получено неравенство $S_{KTRFL} < TR \cdot RF \cdot Sin\angle TRF$ – 5 баллов.
- Полное решение – 7 баллов.

№4 (7 баллов). Десять лунок расположены по кругу. В девяти из них лежит по одиннадцать камней. Одна пустая. Камни можно перекладывать по лункам по следующим правилам: выбирается лунка (в ней должно быть не менее шести камней) и направление перекладывания (по или против часовой стрелки). Из выбранной лунки выбирают шесть камней и раскладывают по ближайшим лункам в выбранном направлении – в самую ближайшую три камня, в следующую – два, в следующую – один. Докажите, что не удастся получить такое расположение камней, при котором во всех лунках по одиннадцать камней, кроме той, что расположена напротив первоначально пустой.

Решение. Чтобы увидеть разницу между начальной и требуемой позициями покрасим лунки в черный и белый цвет через одну, начиная с первоначально пустой. Если это сделать, то можно увидеть, что противоположные лунки имеют различные цвета. Таким образом, в требуемой позиции в лунках черного цвета на одиннадцать камней больше, чем в начальной позиции.

Рассмотрим, как меняется число камней в черных лунках за ход. Если рассыпаются камни из черной лунки, то в черных лунках в сумме становится на 6-2=4 камня меньше, если рассыпаются из белой – то в черных становится на четыре больше. То есть после любого числа ходов разница между начальным и конечным числом камней в черных лунках будет кратна четырем. Но одиннадцать на четыре не делится – приходим к противоречию, которое и показывает, что требуемая позиция недостижима из начальной.

Критерии:

- Установлено, что после любого числа ходов разница между начальным и конечным числом камней в черных лунках будет кратна четырем – 4 балла.
- Полное верное решения – 7 баллов.

Максимальный балл за все выполненные задания — 28.