РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

2023

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА

Задача 1. Дана последовательность $\left\{x_n = \dfrac{n^2+n}{2}\right\}$ (n = 1, 2, …). Докажите, что для любых двух членов x_k и x_m этой последовательности число x_k+x_m+km тоже является ее членом.

Решение. $x_k+x_m+km = (k^2+k)/2+(m^2+m)/2+km = ((k+m)^2+k+m)/2 = x_{k+m}$.

Задача 2. *Может ли сумма квадратов синусов углов треугольника равняться 2?*

Ответ. Может. ***Решение.*** У прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A+\cos^2 A+1 = 2$.

Задача 3. *Шнур длиной 3 м состоит из нескольких зеленых и нескольких красных участков. Зеленый участок горит со скоростью 3 см/сек, а красный — со скоростью 2 см/сек. Когда шнур подожгли одновременно с двух концов, он сгорел за 59 секунд. Какова суммарная длина красных участков шнура?*

Ответ. 108 см. ***Решение.*** Очевидно, если шнур поджечь с одного конца, он будет гореть вдвое дольше, чем подожженный с двух концов, то есть 118 секунд. Пусть общая длина красных участков — x см. Тогда общая длина зеленых — $300-x$ см, и веревка, подожженная с одного конца, будет гореть $x/2+(300-x)/3$ сек. Решая уравнение $x/2+(300-x)/3 = 118$, находим $x = 108$.

• За ответ без объяснения — *0 баллов*. Замечено, что шнур, подожженный с одного конца, горит 118 секунд, дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*. Уравнение верно составлено, но неверно решено — *4 балла*.

Задача 4. *Найдутся ли такие пять различных натуральных чисел a, b, c, d, e, что среди дробей a/b, a/c, a/d, a/e, b/c, b/d, b/e, c/d, c/e, d/e семь сократимы, а три несократимы?*

Ответ. Найдутся. ***Решение.*** Например, 2, 3, 4, 8, 48. Сократимы все дроби с четными числителем и знаменателем и дробь 3/48, остальные сократимы.

• Любой верный пример — *7 баллов*. Проверка не обязательна.

♦ Такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, что среди дробей a_i/a_j ($i > j$) есть ровно одна несократимая, найдутся для любого натурального $n \geq 3$. Достаточно взять $n-1$ различных простых чисел $p_1, \ldots, p_{n-1}$ и положить $a_1 = p_1$, $a_2 = p_1p_2$, …, $a_{n-1} = p_1p_{n-1}$, $a_n = p_2\ldots p_{n-1}$. Единственной несократимой будет дробь a_1/a_n. Мы построили наш пример, взяв $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$.

Задача 5. *Шестиугольник ABCDEF, все углы которого меньше 180 градусов, таков, что каждый треугольник, образованный тремя идущими подряд его вершинами, имеет площадь 1. Докажите, что если AB < DE, то BC > EF.*

Решение. Так как площади треугольников ABC и BCD по условию равны, то равны и высоты, опущенные на их общее основание BC. Поскольку все углы шестиугольника меньше 180 градусов, вершины B и C лежат с одной стороны от прямой AD. Поэтому прямые BC и AD параллельны. Аналогично, $EF \parallel AD$, откуда $BC \parallel EF$, и $AB \parallel CF \parallel DE$. По условию треугольники ABC и DEF имеют равные площади, то есть $AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = DE \cdot EF \cdot \sin\angle DEF$. Так как $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$, $\sin\angle ABC = \sin\angle DEF$. Значит, $AB \cdot BC = DE \cdot EF$, и поскольку $AB < DE$, то $BC > EF$, что и требовалось доказать.

- Доказана только параллельность противоположных сторон шестиугольника — *2 балла*. Тот факт, что точки B и C лежат с одной стороны от прямой AD и аналогичные факты используются без объяснения —*не снижать оценку*.

Задача 6. *В классе каждый ученик дружит ровно с шестью другими, и у любых двух учеников есть ровно два общих друга.* ***а)*** *Сколько учеников в этом классе?* ***б)*** *Докажите, что такая ситуация действительно возможна. (Считается, что если А дружит с Б, то и Б дружит с А.)*

Решение[1]. **а)** Пусть A — ученик класса, $B_1, \ldots, B_6$ — его друзья, а X — некоторый ученик класса, отличный от A. По условию у X должно быть ровно два друга среди $B_1, \ldots, B_6$. С другой стороны, у любых двух друзей B_i и B_j ученика A есть единственный общий друг X, отличный от A. Поэтому учеников, отличных от A, в классе столько же, сколько различных пар, составленных их друзей ученика A, то есть $6{\cdot}5/2 = 15$, а всего в классе *16 учеников*. **б)** Построим 16 учеников в виде квадрата 4х4, и пусть каждый ученик дружит со всеми, кто стоит с ним в одном ряду (одной шеренге или одной колонне). Нетрудно убедиться, что такое отношение дружбы удовлетворяет условиям задачи.

- Пункт а) оценивается *из 4 баллов*, пункт б) — *из 3 баллов*.

[1] Цитируется с сокращениями и изменениями по книге «Всероссийские математические олимпиады школьников в Республике Башкортостан. II этап. Задачи и решения. –Уфа, Уральский РЭК, 2004 – с. 35.