Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2023 – 2024 учебном году

11 класс
Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. В кондитерский лицей поступили 11 мальчиков и несколько девочек – причём некоторые из них были ранее знакомы между собой. На 1 сентября директор лицея принес большой пакет со 165 конфетами. Каждая девочка дала по конфете (из пакета) каждому знакомому ей мальчику, а затем каждый мальчик дал по конфете (из пакета) каждой незнакомой ему девочке. После этого конфеты в пакете закончились. Сколько девочек поступило в лицей?

Ответ. 15 девочек.

Решение 1. Пусть каждая девочка заберёт обратно конфеты, которые она отдала мальчикам. Таким образом, каждая девочка получит по конфете от каждого знакомого мальчика (которые она забрала), а также по конфете от каждого незнакомого мальчика (которые они сами ей отдали). Тогда каждая девочка получит ровно по одной конфете от каждого мальчика, т. е. суммарно 11 конфет. Так как всего конфет было 165, то девочек ровно 15.

Решение 2. Построим двудольный граф знакомств. В одной доле будут вершины, соответствующие мальчикам, а в другой доле — вершины, соответствующие девочкам. Если мальчик и девочка были уже знакомы, то будем соединять соответствующие вершины ребром синего цвета, а если незнакомы — то ребром красного цвета.

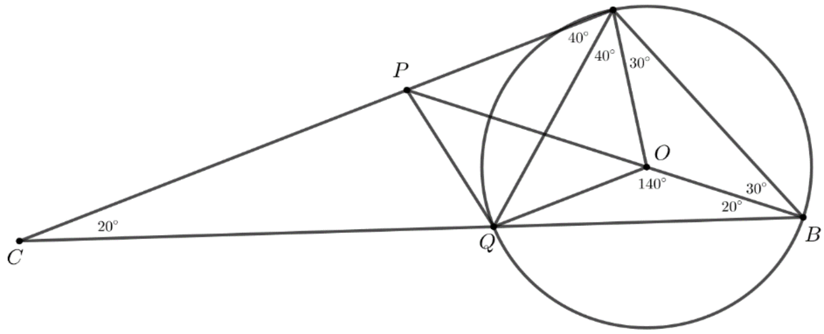
Тогда каждая девочка отдала столько конфет, сколько из соответствующей вершины выходит синих рёбер, а каждый мальчик отдал столько конфет, сколько из соответствующей вершины выходит красных рёбер. Заметим, что при этом каждое ребро (и красное, и синее) участвовало ровно в одной передаче. Поэтому количество конфет равно суммарному количеству рёбер. Если в классе учится x девочек, то всего рёбер между долями ровно $11x$. Значит, $11x=165$, т.е. $x=15$.

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 1 балл. При решении задачи с помощью графов правильно построен граф – 2 балла.

2. В треугольнике ABC ∠A=110°, ∠B=50°. На стороне AC выбрана такая точка P, что ∠PBA=30°, а на стороне BC — такая точка Q, что ∠CAQ=40°. Найдите угол QPB.

Ответ. 40°.

Решение.



Отметим точку O — центр описанной окружности треугольника AQB. Так как

∠QOB=2∠QAB =2(110°−40°)=140°, то

∠QBO =(180°−140°)/2=20°=∠QBP, то есть точка O лежит на отрезке BP.

При этом ∠QOP=180°−140°=40°=∠QAP,

поэтому точки A, O, Q, P лежат на одной окружности. Поэтому

$\angle QPB = \angle QAO = \angle QAB - \angle OAB = 70° - 30° = 40°$.

Комментарий. Доказано равенство углов QOP и QAP – 3 балла. Доказано, что точки A, O, Q, P лежат на одной окружности – 4 балла.

3. Пусть $P_n(x)$ – произвольный многочлен степени n с целочисленными коэффициентами такой, что целые числа $P_n(1)$ и $P_n(2)$ дают равные остатки при делении на 2022. Всегда ли совпадают остатки при делении на 2022 чисел $P_n(2023)$ и $P_n(2024)$?

Ответ. Да, всегда.

Решение. Пусть: $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Тогда

$P_n(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $P_n(2) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n$.

Рассмотрим величину

$P_n(2023) = a_0 + a_1 \cdot 2023 + a_2 \cdot 2023^2 + \cdots + a_n \cdot 2023^n$.

Её можно представить в виде:

$$P_n(2023) = a_0 + a_1 \cdot 2023 + a_2 \cdot 2023^2 + \cdots + a_n \cdot 2023^n =$$

$= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_1 \cdot (2023 - 1) + a_2 \cdot (2023^2 - 1) + \cdots +$
$a_n \cdot (2023^n - 1)$.

Поскольку $(2023 - 1) \vdots 2022$, $(2023^2 - 1) = 2022 \cdot 2024 \vdots 2022$

и для любого натурального k>2

$2023^k - 1 = 2023^k - 1^k = (2023 - 1)(2023^{k-1} + 2023^{k-2} + \cdots + 1) \vdots 2022,$

то $P_n(2023)$ будет иметь тот же остаток при делении на 2022, что и $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = P_n(1)$.

Аналогично, рассмотрим величину

$P_n(2024) = a_0 + a_1 \cdot 2024 + a_2 \cdot 2024^2 + \cdots + a_n \cdot 2024^n =$

$= P_n(2) + a_1 \cdot (2024 - 2) + a_2 \cdot (2024^2 - 2^2) + \cdots + a_n \cdot (2024^n - 2^n)$.

Поскольку $(2024 - 2) \vdots 2022$, $(2024^2 - 2^2) = 2022 \cdot 2026 \vdots 2022$

и для любого натурального k>2

$2024^k - 2^k = (2024 - 2)(2024^{k-1} + 2024^{k-2} \cdot 2 + \cdots + 2^{k-1}) \vdots 2022,$

то $P_n(2024)$ будет иметь тот же остаток при делении на 2022, что и $P_n(2)$.

Так как $P_n(1)$ и $P_n(2)$ дают равные остатки при делении на 2022, то и $P_n(2023)$ с $P_n(2024)$ также будут давать равные остатки при делении на 2022.

Комментарий. Доказана связь между $P_n(1)$ и $P_n(2023)$, $P_n(2)$ и $P_n(2024)$– 3 балла.

4. Банкиры Пётр и Василий играют в игру: они по очереди изымают средства из межбанковского фонда, первоначально содержащего 1331 золотую монету, причем первый ход делает Пётр и берёт 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берёт (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

Ответ. Пётр.

Решение. Пусть Пётр независимо от действий Василия берёт первым ходом 1 монету, вторым – 2, третьим – 3 и т.д., увеличивая каждый раз количество взятых монет на 1. Это не противоречит правилам, так как при такой игре Петра Василий сможет первым ходом взять только 1 или 2 монеты, вторым – только 2 или 3 и т.д. Тогда после k-го хода Петра игроки возьмут монет не менее

$(1 + 2 + ... + k) + (1 + 2 + ... + (k - 1)) = k^2$

и не более

$(1 + 2 + ... + k) + (2 + 3 + ... + k) = k(k + 1) – 1$.

Заметим, что после 36-го хода Петра из фонда должно быть взято от 36^2 = 1296 монет до $36 \cdot 37 – 1 = 1331$ монеты. Так как изначальный объем фонда – 1331 монета, то на 36-й ход Петра его в любом случае хватит. Но после этого хода в фонде останется от 0 до 1331 – 1296 = 35 монет, следовательно, Василий не сможет сделать 36-й ход по правилам.

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 0 баллов. Показана, но не обоснована выигрышная стратегия Петра – 3 балла.

5. Назовем усложнением числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?

Ответ. Существует.

Решение. Докажем, что среди чисел от 0 до $N - 1$, где $N = 10^{500}$, найдется искомое число. Если любое число из этого диапазона усложнить 100 раз, получится число, меньшее $10^{600} = (10^{300})^2$. Существует ровно 10^{300} полных квадратов, меньших 10^{600}. Зафиксируем k – один из этих квадратов. Количество чисел, из которых его можно получить описанной в условии операцией, не превосходит количества способов зачеркнуть в нем 100 цифр. Это количество строго меньше количества способов выбрать из его цифр произвольный набор. Последнее же количество равно $2^{(\text{количество цифр в k})} \leq 2^{600}$. Таким образом, общее количество чисел от 1 до $N - 1$, из которых может быть получен полный квадрат, не превосходит $10^{300} \cdot 2^{600} = 10^{300} \cdot 8^{200} < 10^{500} = N$. Отсюда следует, что на промежутке от 0 до $N-1$ найдется число, из которого 100-кратным усложнением нельзя получить полный квадрат, что и требовалось

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 0 баллов. Приблизительно получена оценка, в каких пределах может быть построено искомое число, – 3 балла. Получено продвижение в конструктивном построении решения – 2-3 балла.