11 класс

1. Корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$равны sin 31° и sin 59°. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.

   Решение. Это следует из того, что $\frac{b}{a} = -sin(31°) - sin(59°)$, $\frac{c}{a} = sin(31°) \cdot sin(59°)$и $sin^2(31°) + sin^2(59°) = sin^2(31°) + cos^2(31°) = 1.$
2. Назовём число хорошим, если его можно представить в виде суммы факториалов трёх разных натуральных чисел (например, 9 – хорошее число, так как 9 = 1!+2!+3!). Докажите, что бесконечно много натуральных чисел не являются хорошими. (Напомним, что факториал числа n – это произведение 1·2·3· … ·n, обозначается как n!)

   Решение. Такими являются, например, числа N=n!+5 при n>10. Докажем, что они не представимы в виде суммы трех разных факториалов. Так как N – нечетно, то один из факториалов это 1!. Если два оставшихся факториала больше 2!, то их сумма делится на 6 и прибавляя 1! получаем число с остатком 1 при делении на 6, но N имеет остаток 5 при делении на 6. Значит, второй факториал должен быть 2!. Но тогда их сумма будет давать остаток 3 при делении на 6.
3. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик написал, сколько в классе девочек выше его, а каждая девочка написала, сколько в классе мальчиков ниже её. Оказалось, что все написанные числа не меньше четверти числа учеников в классе. Докажите, что суммарный рост девочек в классе больше суммарного роста мальчиков.

   Решение. По крайней мере половина всех мальчиков ниже самой низкой девочки и половина всех девочек выше самого высокого мальчика. Тогда “половина” самых низких девочек выше “половины” самых низких мальчиков (то есть каждая девочка из группы самых низких девочек выше любого мальчика из группы самых низких мальчиков, если девочек нечетно, то “половина” - это половина с округлением в большую сторону). Любая оставшаяся девочка выше любого оставшегося мальчика.
4. Через центр вписанной окружности четырехугольника ABCD проведена прямая. Она пересекает сторону AB в точке X и сторону CD в точке Y. Оказалось, что ∠AXY = ∠DYX. Докажите, что $\frac{AX}{BX} = \frac{CY}{DY}$.

   Решение. Пусть I – центр вписанной в ABCD окружности. I – точка пересечения биссектрис углов четырехугольника. Пусть ∠XAI = ∠IAD = a, ∠YDI = ∠ IDA = b, ∠AXY = ∠DYX = c. Тогда сумма углов четырехугольника AXYD равна 2a+2b+2c. Значит a+b+c=180°.
   Тогда ∠YID = a, ∠XIA = b, треугольники AXI и IYD – подобны. Из подобия треугольников AX·DY=IX·IY. Аналогично получаем, что BX·CY=IX·IY. Тогда AX·DY= BX·CY и $\frac{AX}{BX} = \frac{CY}{DY}$.
5. Двадцать бегунов два раза участвовали в забеге. Каждый раз все занимали разные места. Один из них сказал: “Мое место во втором забеге такое же, как в первом”, другой сказал: “Мое место во втором забеге на 1 выше, чем в первом”, следующий: “Мое место во втором забеге на 2 выше, чем в первом забеге”, …, последний сказал: “Мое место во втором забеге было на 19 выше, чем в первом”. Какое наибольшее количество из этих утверждений могло оказаться правдой?

Ответ: 13.
Решение.
Оценка.
Переформулируем задачу. У нас есть числа 1, 2, …, 20 и x_1, x_2, …, x_{20}. Оказалось, что числа $1+x_1$, $2+x_2$, …, $20+x_{20}$ - это числа 1, 2, …, 20 в некотором порядке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди отрицательных чисел из x_1, x_2, …, x_{20}.
Допустим их 14. Тогда сумма их модулей равна минимум 0+1+…+13=91. Но тогда сумма положительных чисел тоже должна быть равна 91. Но их максимальная сумма равна 14*6=84 (когда были числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, а стали 15, 16, 17, 18, 19, 20). Противоречие. (Аналогично для большего количества.)
Пример. 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 13, 12, 11, 10, 9, 8 (первый во второй раз прибежал 20-м, второй – 19-м и т. д.).
Изменения мест были 19, 17, 15, 13, 11, 9, -1, -3, -5, -7, -9, -11, -13, -2, -4, -6, -8, -10, -12.