11 класс

1. В числе $2^*0^*2^*3^*0^*$ нужно заменить каждую из 5 звездочек на любую из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8 (цифры могут повторяться) так, что полученное 10-значное число делилось на 36. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Для того, чтобы число делилось на 36 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 9. Для делимости на 4 в качестве последней цифры берем 0,4 или 8 (3 способа)

Для делимости на 9 поступим так. Выберем 3 цифры произвольно ($9 \cdot 9 \cdot 9$ способов), а четвертую цифры подберем так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку все возможные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 (0,1,2,…,8) и при этом каждый остаток встречается только один раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применим правило произведений

$3 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81 \cdot 9 \cdot 3 = 729 \cdot 3 = 2187$ способов.

Ответ: 2187

2. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{sin^6x} + \frac{1}{cos^4 2x}\right)(sin^6x + cos^4 2x) = 4cos^2\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}\right)$$

Решение:

Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4. \qquad (1)$$

По неравенству о среднем арифметическом и геометрическом

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \;\; \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4.$

ОДЗ: $sinx \neq 0, \;\; cos2x \neq 0$

$\frac{\pi^2}{4} - x^2 \geq 0; \quad x^2 \leq \frac{\pi^2}{4}; \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}$;

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \quad x \neq 0; \quad 2x \neq \frac{\pi}{2}; \quad x \neq \frac{\pi}{4}.$

На ОДЗ имеем: $sin^6x > 0, \;\; cos^4 2x > 0$, то по (1), получаем, что для любого x левая часть уравнения не меньше 4, в тоже время

$4cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} \leq 4 \;\; \Rightarrow$

уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{sin^6x} + \frac{1}{cos^4 2x}\right)(sin^6x + cos^4 2x) = 4 \\ cos^2\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}\right) = 1 \end{cases}$$

$cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} = 1$, с учетом ОДЗ $\;\; x = \pm\frac{\pi}{2}.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{2}$.

3. Решить уравнение: $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

Решение:

Обозначим $\sqrt[3]{2-x} = u$, а $\sqrt{x-1} = \upsilon$, тогда

$2 - x = u^3$

$x - 1 = \upsilon^2$.

Имеем систему

$$\begin{cases} u + \upsilon = 1, \\ u^3 + \upsilon^2 = 1. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $\upsilon = u - 1$,

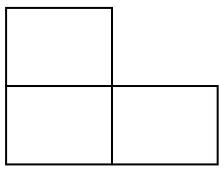
$u^3 + u^2 - 2u + 1 = 1$

$u^3 + u^2 - 2u = 0$

подставим во второе, получим $u(u^2 + u - 2) = 0$, откуда $u_1 = 0,\ u_2 = 1$, $u_3 = -2$, откуда $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 10$.

Ответ: 1, 2, 10.

4. Существуют ли на клетчатой бумаге прямоугольник, который можно без пересечений замостить «уголками», изображенными на рисунке



с выполнением условий

- ✓ ни в какой точке не смыкается более трех «уголков»;
- ✓ никакие два «уголка» не образуют прямоугольник 3×2 клетки?

Решение:

Предположим, что такой прямоугольник существует. Если в замощении прямоугольника какой-либо «уголок» примыкает к краю прямоугольника стороной из одной клетки, то он неизбежно должен быть дополнен другим «уголком» 3×2 до прямоугольника, что противоречит условию. Следовательно, каждый «уголок» примыкает к краю прямоугольника со сторонами из двух клеток, а прямоугольник имеет четные размеры $2l \times 2k$.

Так как каждый «уголок» имеет 6 вершин, то всего у «уголков», покрывающих прямоугольник, будет $\frac{2l \cdot 2k}{3} \cdot 6 = 8lk$ вершин.

Посчитаем количество вершин у всех «уголков» другим спросом:

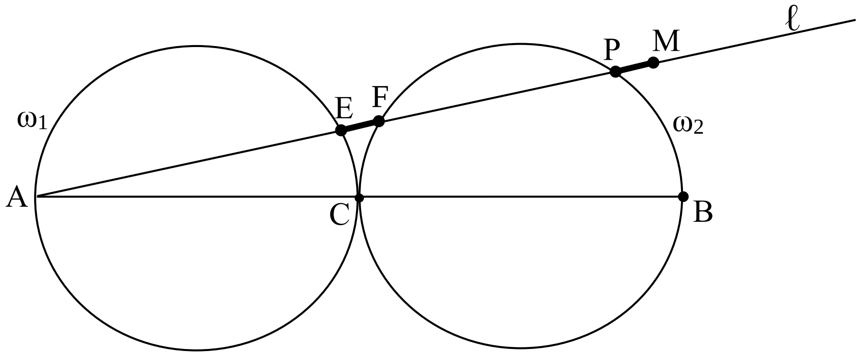
В каждом узле клетчатой бумаги внутри прямоугольника, как следует из условия задачи, смыкается не более 2 вершин, на стороне длиной $2l$ – не более $2(l-1)$ вершин, в углах прямоугольника – по 1 вершине. Всего не более

$$2(2l-1)(2k-1) + 2 \cdot 2(l-1) + 2 \cdot 2(k-1) + 4 = 8lk - 2 < 8lk$$

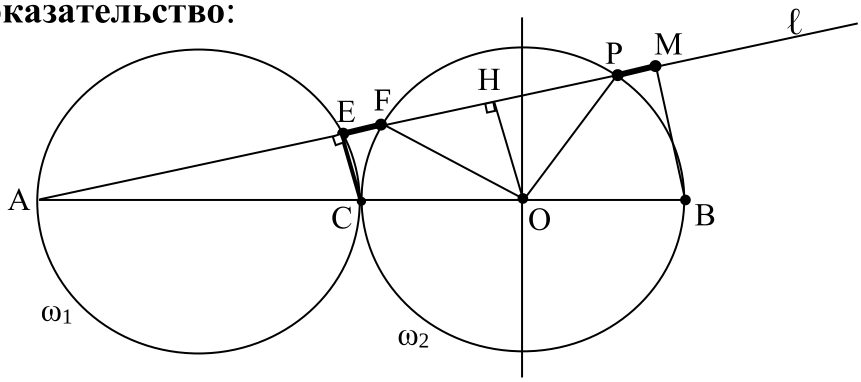
вершин.

Противоречие. Значит, прямоугольника, удовлетворяющего условию задачи, не существует.

5. Две окружности, радиусы которых равны, касаются внешним образом в точке C. AC – диаметр первой окружности ω_1, CB – диаметр второй окружности ω_2. Прямая ℓ, проходящая через точку A пересекает вторично ω_1 в точке E, пересекает ω_2 в точках F и P. На прямой ℓ за точку P взята точка M так, что EF=PM. Докажите, что $AB = 2MC$.



Доказательство:



1) Точки A,B,C лежат на одной прямой, так как AC и CB диаметры;
2) Пусть O – центр ω_2. Опустим $OH \perp \ell$

   $\left.\begin{array}{l}\Delta FOP \text{ – равнобедренный} \\ OH \text{ – высота}\end{array}\right. \Rightarrow FH=HP \Rightarrow EH=HM.$
3) $\angle AEC = 90^o$, т.к. опирается на диаметр AC. $\angle AHO = 90^o$. Таким образом, $EC \perp \ell$, $OH \perp \ell$, следовательно, $EC \parallel OH$.
4) $$\left.\begin{array}{l} EH = HM \\ CO = OB \\ EC \parallel OH \end{array}\right\} \Rightarrow BM \parallel OH \Rightarrow \angle HMB = 90^o \Rightarrow \Delta AMB$$ – прямоугольный.
5) Так как AMB – прямоугольный треугольник и C – середина AB (по условию AC=CB) , то MC – медиана прямоугольника, проведенная к гипотенузе.

   Поэтому AB=2MC.