Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

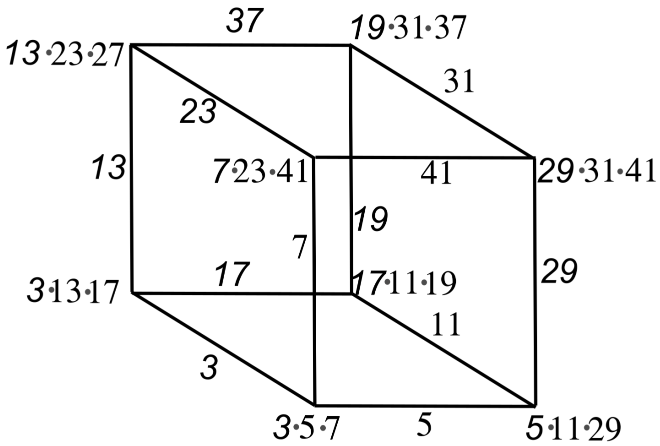
2023-2024 уч.год

11 класс

Решения и ответы

1. Можно ли так расставить натуральные числа в вершинах куба, чтобы были выполнены два правила:
– любые два числа, стоящие в соседних вершинах, т.е. в вершинах, соединенных ребром, имели бы общий делитель;
– любые два числа, стоящие в вершинах, которые соединяются диагональю грани или пространственной диагональю куба, не имели бы общих делителей, больших единицы?

   Решение. Да, это можно сделать. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Возьмем простые числа $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41$. Напишем одно из этих простых чисел рядом с одним ребром. В каждой вершине напишем произведение чисел, стоящих на выходящих из этой вершины ребрах. Например, в вершине A разместим число $3 \cdot 5 \cdot 7$, в вершине B – число $3 \cdot 13 \cdot 17$, и т.д. Очевидно, каждая пара соседних по стороне вершин имеет общий делитель своих двух чисел. Каждая пара чисел, стоящих на диагонали грани или на пространственной диагонали куба, не имееет общих делителей.



2. График квадратного трехчлена $y = x^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в точках A, B и пересекает ось ординат в точке C. Оказалось, что площадь треугольника ABC равна 45. Найдите значение $b^2c^2 - 4c^3$.

   Решение. Пусть график квадратного трехчлена пересекает оси координат в точках $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$ и $C(0;c)$. Площадь треугольника находится по формуле $S = \frac{ah}{2}$, где a - длина отрезка AB, а h – высота, опущенная из точки C.

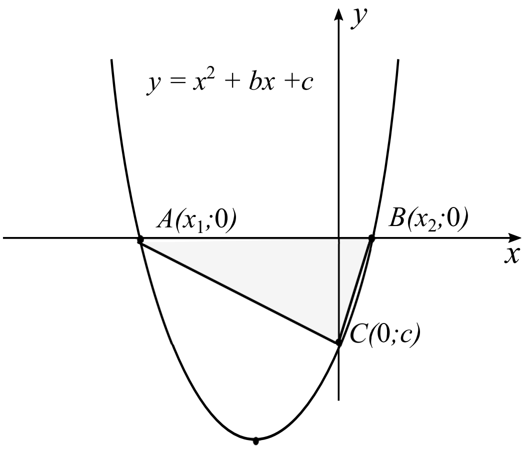
   Длина отрезка AB - это расстояние между корнями данного квадратного трехчлена: $|AB| = |x_1 - x_2| = \sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4c}$. Высота равна модулю ординаты точки C, то есть $h = |c|$. Тогда

$$S = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}|c|}{2} = 45.$$

$$\sqrt{b^2 - 4c}|c| = 90$$

$$(b^2 - 4c)c^2 = 8100$$

Ответ. 8100



3. Пусть O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что площади треугольников AOB и COD равны 1 и 4. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ не меньше 9.

   Решение. Пусть $\dfrac{OC}{OA} = x$. Из отношения площадей треугольников с общей стороной получаем $\dfrac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = x$, т.е. $S_{BOC} = x$. Аналогично $\dfrac{S_{COD}}{S_{AOD}} = x$, т.е. $S_{AOD} = \dfrac{4}{x}$. Требуется доказать, что

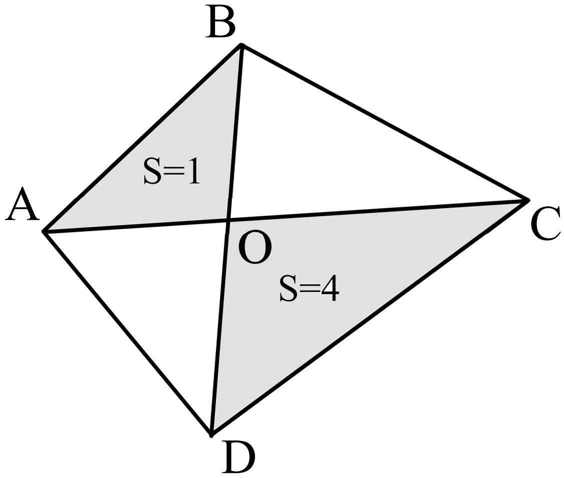
   $$S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} \geq 9$$

   Подставляя данные и найденные величины, получим

   $$1 + x + 4 + \frac{4}{x} \geq 9$$

   $$x + \frac{4}{x} \geq 4$$
   $$x^2 - 4x + 4 \geq 0$$
   $$(x-2)^2 \geq 0$$

   Последнее неравенство, очевидно, верно. Исходное неравенство ему равносильно ($x > 0$).



4. Докажите, что не существует такого простого числа p, что $p^5 + 2023p^3 - 1$ является квадратом целого числа.

   Решение. Пусть $p = 2$. Тогда $p^5+2023p^3-1 = 32+2023\cdot 8-1 = 16215$, что не является квадратом (оканчивается на 15).

   Рассмотрим простые нечетные p.

   Известно, что квадраты нечетных чисел дают остаток 1 при делении на 8. Действительно,
   $$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$$
   Произведение $k(k+1)$ – это произведение двух последовательных чисел, т.е. четное число, поэтому первое слагаемое делится на 8.

   Заметим, что $p^5+2023p^3-1$ нечетное число. Поэтому, если бы выражение $p^5+2023p^3-1$, было бы квадратом целого числа, то оно давало бы остаток 1 при делении на 8. Значит, выражение $p^5 + 2023p^3$ давало бы остаток 2 при делении на 8.

   С другой стороны,
   $$p^5 + 2023p^3 = p^3(p^2 + 2023)$$
   Так как p – нечетное число, то p^2 дает остаток 1 при делении на 8. Очевидно, 2023 дает остаток 7 при делении на 8 ($2023 = 2024 - 1$). Складывая остатки, получаем, что $p^2 + 2023$ делится на 8. Следовательно $p^5 + 2023p^3$ делится на 8 и не может давать в остатке 2. Мы доказали, что $p^5 + 2023p^3 - 1$ не может быть квадратом целого числа.

5. В некотором клиентском зале расположены терминалы для работы посетителей и серверы (управляющие компьютеры). Каждый терминал соединен кабелями с некоторыми (но не всеми) серверами. Всего терминалов 15. Наблюдается такая закономерность. Если выбрать любую группу терминалов численностью 6 и выше, то окажется, что число всех серверов, с которыми соединены эти терминалы, ровно на 1 больше, чем число терминалов в выбранной группе. Докажите, что некоторый сервер соединен не менее, чем с 9 терминалами.

   Решение. Рассматриваем максимальную группу из 15 терминалов и сразу получаем, что все терминалы каким-то образом соединены с 16 серверами. Выберем произвольный терминал T_1. По условию, все остальные 14 терминалов как-то соединены с 15 серверами. Тогда тот сервер, который не входит в эту группу из 15 серверов, соединен только с терминалом T_1, и мы его назовем S_1. (Один сервер входил в группу всех серверов, соединенных с группой из 15 терминалов, мы удалили T_1, и какой-то сервер удалился из этой группы, так как серверов стало на один меньше. Уменьшенная группа - это группа всех серверов, соединенных с $T_2 - T_{15}$. Значит, лишний сервер был соединен только с удаленным терминалом T_1, и мы этот сервер называем S_1). Рассуждая так же про остальные терминалы $T_2, T_3, \ldots, T_{15}$, получаем, что каждому из них соответствует сервер $S_2, S_3, \ldots, S_{15}$, соединенный ровно с одним терминалом. Рассмотрим оставшийся сервер S_{16}. Предположим, что он соединен менее, чем с 9 терминалами. Рассмотрим группу из оставшихся терминалов, не соединенных по нашему предположению с S_{16}. Таких терминалов не меньше $15 - 9$, т.е. их не меньше 6. Пусть их n штук. Мы доказали, что каждый сервер $S_1 - S_{15}$ соединен ровно с одним терминалом $T_1 - T_{15}$ соответственно. Значит, в группе серверов, соединенных с оставшимися n терминалами, ровно n серверов. Противоречие. (Пусть эти n терминалов имеют номера $T_k \ldots T_{k+n-1}$. С каждым из них соединен сервер $S_k \ldots S_{k+n-1}$, и среди этих серверов нет S_{16}. Значит, группа серверов $S_k \ldots S_{k+n-1}$ состоит из всех серверов, соединенных с терминалами $T_k \dots T_{k+n-1}$, и их ровно n.) Получили противоречие, оно доказывает, что сервер S_{16} соединен не менее, чем с 9 терминалами.