Решения муниципального этапа ВсОШ по математике

11 класс

1. Найдите все корни уравнения

$$\frac{1}{(y+2019)(y+2020)}+\frac{1}{(y+2020)(y+2021)}+\frac{1}{(y+2021)(y+2022)}+\frac{1}{(y+2022)(y+2023)}=\frac{1}{1439999}.$$

Решение. $\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$. Тогда левая часть уравнения примет вид:

$$\frac{1}{y+2019}-\frac{1}{y+2020}+\frac{1}{y+2020}-\frac{1}{y+2021}+\frac{1}{y+2021}-\frac{1}{y+2022}+\frac{1}{y+2022}-\frac{1}{y+2023}=$$

$=\frac{1}{y+2019}-\frac{1}{y+2023}$. Обозначая $y+2021=t$, получим $\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{1439999}$;

$$\frac{4}{(t-2)(t+2)}=\frac{1}{1439999};$$

$$t^2=4(1439999+1);$$

$$t=\pm 2400;$$

$$y_1=379, y_2=-4421.$$

Ответ. 379, – 4421.

2. Решите на множестве натуральных чисел уравнение:

$$1+y+y^2+y^3=2^t.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду: $(1+y^2)(1+y)=2^t$, откуда $1+y^2=2^m$, где m – целое неотрицательное число и $1+y=2^n$, где n – целое неотрицательное число. Так как $y=2^n-1$, то $y^2=(2^n-1)^2$. Учитывая, что $1+y^2=2^m$, получим $2^{2n}-2\cdot 2^n+2=2^m$. Разделив обе части уравнения на 2, получим:
$2^{2n-1}-2^n+1=2^{m-1}$, которое равносильно уравнению $2^n(2^{n-1}-1)+1=2^{m-1}$. Так как *m* – целое неотрицательное число, то при *m* > 1 число 2^{m-1} является четным, поэтому $2^n(2^{n-1}-1)$ – число нечетное. А это невозможно. Значит, осталось рассмотреть *m* = 0 и *m* = 1. При *m* = 0 имеем $1+y^2=2^0$, натуральных решений нет. А при *m* = 1 получим, что $y^2=1$, и учитывая, что *x* – число натуральное, получаем *y* = 1, *t* = 2.
Ответ. *y* = 1, *t* = 2.

3. Маша и Катя исследуют 51 одинаковый по форме алмазов. Один из алмазов искусственный, а не природный, и он легче природных. Все природные алмазы весят одинаково. У девочек есть чашечные весы без гирь. Можно ли за 5 взвешиваний найти искусственный алмаз, если каждый из алмазов можно взвешивать не более 2 раз?

Решение. Поступаем следующим образом. Сначала положим на две чашки весов по 9 алмазов, потом по 7 из еще не бравшихся алмазов, затем – по 5; 3; 1. Если во всех случаях было равновесие, то искусственный алмаз – оставшийся. Если при каком-то взвешивании одна из чашек перевесила, то искусственный алмаз лежит в другой чаше. Рассмотрим, как ее определить. Если это случилось при первом взвешивании, то разбиваем 9 алмазов на пары и за 4 взвешивания находим искусственный алмаз, взвешивая по одной паре. Если при каком-то взвешивании равновесие нарушается, то более легкий алмаз и будет искусственным, если же ни в одном взвешивании равновесие не нарушится, то оставшийся без пары алмаз – искусственный. Аналогично поступаем и в остальных случаях: когда равновесие нарушилось во второй, третий или четвертый раз. Если равновесие нарушилось в пятый раз, когда на чашах лежало по одному алмазу, то более легкий алмаз – искусственный.

Ответ. Да.

4. Найдите функцию $g(x)$, для каждого $t > 0$ удовлетворяющую равенству $5g(t) = 3g\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Решение. Заменяя *t* на $\left(\frac{1}{t}\right)$, получим $5g\left(\frac{1}{t}\right) = 3g(t) + \sqrt{t}$, где $t > 0$.

Решая полученное уравнение с данными, имеем систему относительно $g(t)$ и $g\left(\frac{1}{t}\right)$:

$$\begin{cases} 5g(t) - 3g\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \\ 3g(t) - 5g\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\sqrt{t}. \end{cases}$$

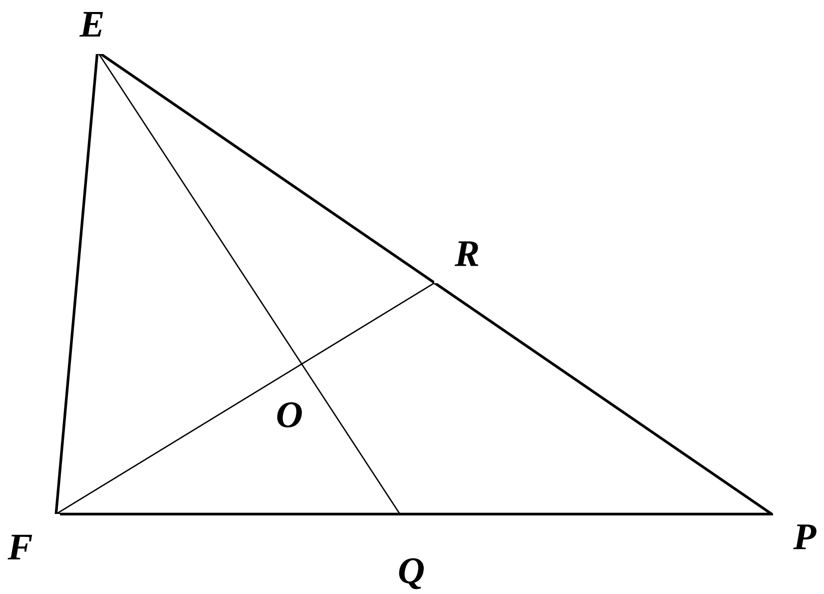
Поскольку нам надо найти *g(t)*, то умножим обе части первого уравнения на 5, а второго на (-3), а затем почленно сложим:

$$16g(t) = \frac{5}{\sqrt{t}} + 3\sqrt{t}, \qquad t > 0,$$

откуда $g(t) = \frac{5 + 3t}{16\sqrt{t}}$. Заменяя *t* на *x*, получим $g(x) = \frac{5 + 3x}{16\sqrt{x}}$.

Ответ. $g(x) = \frac{5 + 3x}{16\sqrt{x}}$.

5. Дан треугольник *EFP*. Длины сторон *EP* = *m*, *FP* = *n*. Точка *Q* лежит на стороне *FP* и *FQ* = *QP*, а точка *R* лежит на стороне *EP* и *ER* = *RP*, причем *EQ* ⊥*FR*. Найдите длину стороны *EF*.



Решение. Используя теорему косинусов для $\Delta EQP, \Delta FPR, \Delta EPF$, имеем:

$$EQ^2 = m^2 + \frac{1}{4}n^2 - mn\cos\angle P, \qquad (1)$$

$$FR^2 = n^2 + \frac{1}{4}m^2 - mn\cos\angle P, \qquad (2)$$

$$EF^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\angle P. \qquad (3)$$

Так как по условию задачи $EQ \perp FR$, то из ΔFOE имеем

$$EF^2 = EO^2 + FO^2. \qquad (4)$$

По свойству медианы треугольника $FO = \frac{2}{3}FR$; $EO = \frac{2}{3}EQ$, тогда (4) примет вид

$$EF^2 = \frac{4}{9}(EQ^2 + FR^2), \qquad (5)$$

Упростим (5) с учетом (1) и (2):

$$EF^2 = \frac{1}{9}(5m^2 + 5n^2 - 8mn\cos\angle P), \qquad (6)$$

Сравнивая (3) и (6), получим

$4(m^2 + n^2) = 10mn\cos\angle P$, откуда $\cos\angle P = \frac{2(m^2+n^2)}{5mn}$, тогда (3) примет вид:

$$EF^2 = \frac{1}{5}(m^2 + n^2),$$

откуда $EF = \sqrt{\frac{1}{5}(m^2 + n^2)}$.

2 способ. Пусть $FO = 2x$, $EO = 2y$. Тогда, по теореме Пифагора из треугольников FOQ и EOR получаем:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}n^2; \\ x^2 + 5y^2 = \dfrac{1}{4}m^2. \end{cases}$$

Суммируя, получим $x^2 + y^2 = \frac{1}{20}(m^2 + n^2)$.

По теореме Пифагора из треугольников FOE: $EF^2 = 4(x^2 + y^2) = \frac{1}{5}(m^2 + n^2)$.

Ответ. $EF = \sqrt{\frac{1}{5}(m^2 + n^2)}$.