**11 класс**

$\boxed{1}$ *О вещественных числах $a$ и $b$ известно, что $a^3 < b$ и $b^7 < a$. Докажите, что из неравенств $2ab < a + b$ и $a^4 + b^4 > a + b$ выполняется ровно одно.*

**Решение.** Поскольку $a^3 < b$, то $a^{21} = (a^3)^7 < b^7 < a$. Отсюда $a^{21} - a = a(a^{20} - 1) < 0$. Поэтому $a < -1$ или $0 < a < 1$.

Если $a < -1$, то $b^7 < a < -1$ и $b < -1$. В этом случае неравенство $2ab < a + b$ не выполняется, так как $a+b < -1+(-1) = -2 < 0 < 2ab$. Неравенство же $a^4+b^4 > 0 > a+b$ выполняется при $a < -1, b < -1$.

Если же $0 < a < 1$, то $0 < a^3 < b$ и $1 > a > b^7$, $b < 1$. Тогда $a^4 < a$ и $b^4 < b$, и неравенство $a^4 + b^4 > a + b$ не выполняется. Но зато выполняется неравенство $2ab < a + b$, поскольку при $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$ будет $2ab = ab + ba < a + b$.

$\boxed{2}$ *В киноклубе 29 участников и по уставу каждый участник один раз в год устраивает кинопоказ. За прошедший год на каждый из 29 кинопоказов пришли некоторые участники (ни на один показ не пришли все сразу, но на каждом показе был кто-то кроме хозяина). Возможно ли, что любые два участника киноклуба встретились на показах одинаковое число раз? (Считаем, что на каждом кинопоказе все пришедшие на него встретились между собой и каждый пришедший встретился с хозяином.)*

**Решение.** Например, расставим членов клуба по кругу. Пусть на сеанс, организованный каждым участником $A$, приходят все, кроме участника, стоящего на круге следующим за $A$ о часовой стрелки. Тогда на любом сеансе нет ровно одного человека, и тем самым произвольные члены клуба $A$ и $B$ встречаются ровно на 27 сеансах (и не встречаются на тех и только тех двух сеансах, куда не пришел $A$ или не пришел $B$).

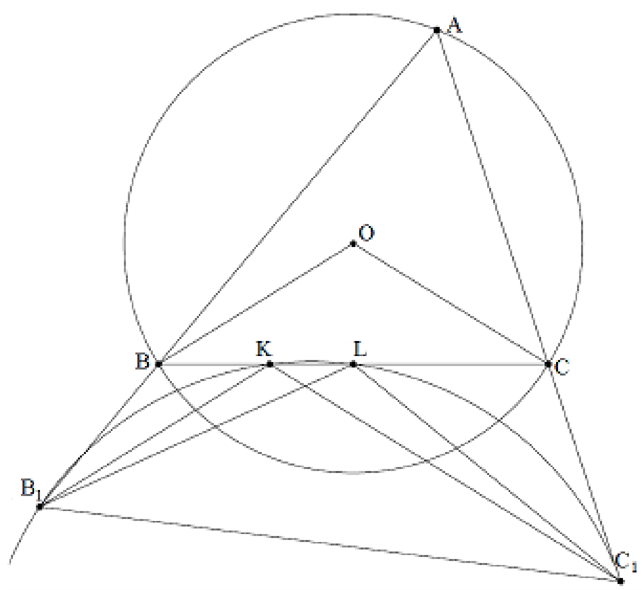


Рис. 1: К задаче 4 для 11 класса

$\boxed{3}$ *Пусть $m$ и $n$ – натуральные числа и $2^m > 5^n$. Каково наименьшее возможное значение разности $2^m - 5^n$?*

**Решение.** Прежде всего, число $2^m$ при натуральном $m$ четное, а число $5^n$ при натуральном $n$ нечетное. Поэтому $2^m - 5^n \neq 2$.

Пусть $2^m - 5^n = 1$. Тогда если $m = 2k$, то $2^m - 5^n = 4^k - 5^n = 1$. Остаток числа $4^k - 5^n = 4^k - (4 + 1)^n$ от деления на 4 равен 3, поэтому $4^k - 5^n \neq 1$. Если же $m = 2k + 1$, то $2^m - 5^n = 2 \cdot 4^k - 5^n = 2 \cdot (5-1)^k - 5^n$ и остаток $2^m - 5^n$ от деления на 5 равен 2 или 3. Поэтому $2^m - 5^n \neq 1$ и в этом случае. Значит, $2^m - 5^n \geqslant 3$. При этом $2^7 - 5^3 = 128 - 125 = 3$.

$\boxed{4}$ *Точки $B$ и $C$ зафиксированы на окружности $\omega$, а точка $A$ движется по дуге $BC$. Зафиксируем на хорде $BC$ точку $K$. Прямая, проходящая через $K$ параллельно $OB$, пересекает прямую $AB$ в точке $B_1$. Прямая, проходящая через $K$ параллельно $OC$, пересекает прямую $AC$ в точке $C_1$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $AB_1C_1$ движется по прямой $BC$.*

**Решение.** Пусть окружность, проходящая через точки $B_1$, $C_1$ и $K$, вторично пересекает прямую $BC$ в точке $L$. Тогда $\angle LB_1C_1 = \angle LKC_1 = \angle KCO = \angle KBO = \angle BKB_1 = \angle LC_1B_1$. Значит, $LB_1 = LC_1$ и $\angle B_1LC_1 = \angle B_1KC_1 = \angle BOC = 2\angle B_1AC_1$. Значит, $L \in BC$ есть центр вписанной окружности треугольника $AB_1C_1$.

$\boxed{5}$ *Последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_n$ назовем* хорошей, *если $b_k = k$ или $b_k = k+1$ для каждого натурального $k = 1, 2, \ldots, n$. Если сумма $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ четна, то назовем хорошую последовательность* четной, *в противном случае назовем ее* нечетной. *Для каждой нечетной хорошей последовательности вычислили произведение входящих в нее чисел и написали это произведение на бумажку. Для каждой четной хорошей последовательности вычислили произведение входящих в нее чисел и написали это произведение на картонку. Что больше: сумма чисел на бумажке или сумма чисел на картонке, и на сколько?*

**Решение.** Пусть $X_n$ – та из двух сумм (на бумажке или на картонке), которая содержит слагаемое $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)$, а $Y_n$ – оставшаяся сумма. Покажем, что $X_n - Y_n = 1$ для всех $n$.

1) База. $n = 1$. Тогда $X_n = 2$, $Y_n = 1$ и $X_n - Y_n = 1$ – верно.

2) Переход. Пусть $X_{n-1} - Y_{n-1} = 1$. Представим $X_n = X' + X''$, где $X'$ – сумма слагаемых вида $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot (n+1)$ и $X''$ – сумма слагаемых вида $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot n$. В частности, в сумму $X'$ входит слагаемое $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)$. Поэтому для всех слагаемых суммы $X'$ четность числа $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$ та же, что и четность $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Поэтому $X' = (n+1)X_{n-1}$. Соответственно, в каждом слагаемом $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot n$ в составе $X''$ четность числа $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$ противоположна четности $2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Поэтому $X'' = nY_{n-1}$. Значит, $X_n = (n+1)X_{n-1} + nY_{n-1}$.

Аналогично установим, что $Y_n = nX_{n-1} + (n+1)Y_{n-1}$. Поэтому $X_n - Y_n = X_{n-1} - Y_{n-1} = 1$.

Осталось заметить, что хорошая последовательность $2, 3, \ldots, n, n+1$ нечетна, если $n$ имеет остаток 2 или 3 при делении на 4. В этом случае число на бумажке на 1 больше, чем на картонке. Если же $n$ имеет остаток 0 или 1 при делении на 4, то число на картонке на 1 больше.