ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

2023-2024 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский.

11 класс

11.1. В правильном 30-угольнике одну вершину покрасили в красный цвет, а остальные – в синий. Сколькими способами можно выбрать прямоугольный треугольник с одной красной и двумя синими вершинами?

Ответ. 42.

Решение. Опишем вокруг многоугольника окружность. Угол является прямым, если он опирается на диаметр. Возможны два случая.

1. Угол при красной вершине – прямой. Тогда гипотенузу (диаметр) можно выбрать (30–2):2=14 способами.
2. Угол при красной вершине – не прямой. Значит, диаметр с концами в красной и синей вершинах является гипотенузой. Оставшуюся вершину прямого угла можно выбрать 30–2=28 способами.

Всего получаем 28+14=42 способа.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Верно разобран только один случай – 3 балла.

11.2. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, …, 99, 100 и 102. За одну операцию можно выбрать несколько чисел, среднее арифметическое которых – целое число, стереть эти числа и вместо них записать на доску их среднее арифметическое. За какое наименьшее число операций можно оставить на доске только одно число?

Ответ. 2.

Решение. Так как среднее арифметическое написанных чисел есть $\frac{1+2+\dots+100+102}{101} = 50 + \frac{102}{101} = 51 + \frac{1}{101}$ нецелое число, то за одну операцию сделать требуемое не удастся.

Покажем, как оставить на доске одно целое число за две операции. Возьмем сначала числа от 1 до 99. Стерев эти числа, запишем их среднее арифметическое, равное 50. Теперь на доске остались три числа: 50, 100 и 102. Их среднее арифметическое есть 84.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

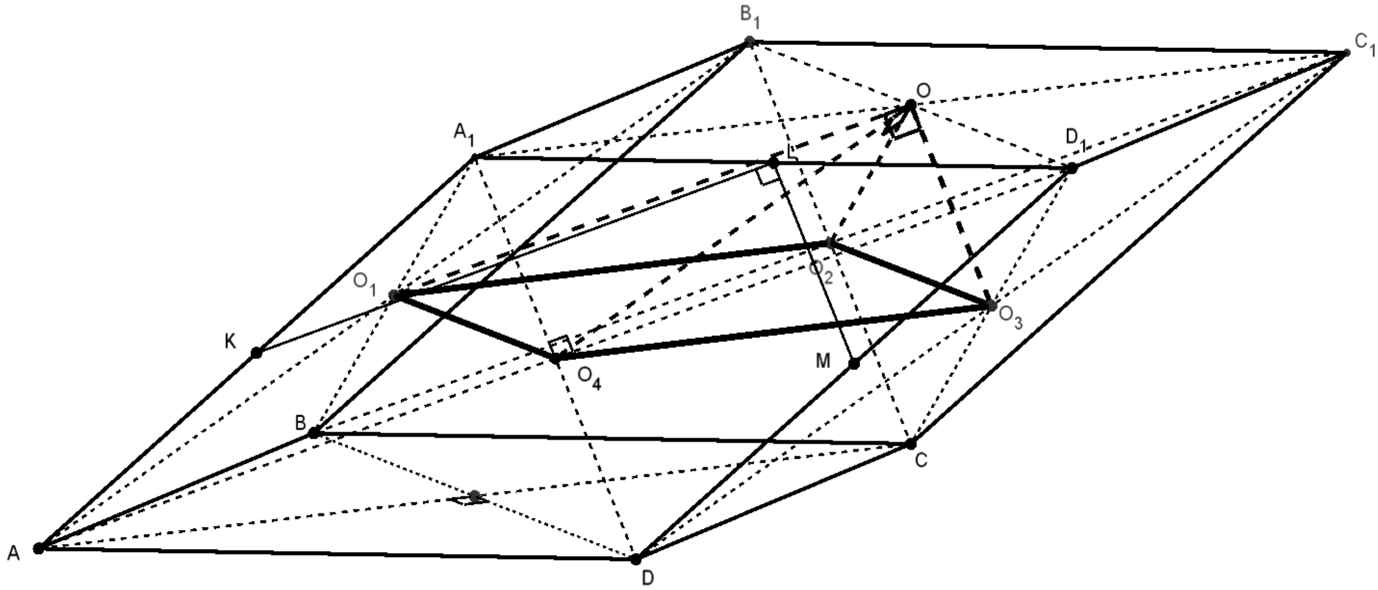
Доказано, что за одну операцию нельзя оставить на доске одно число – 2 балла.

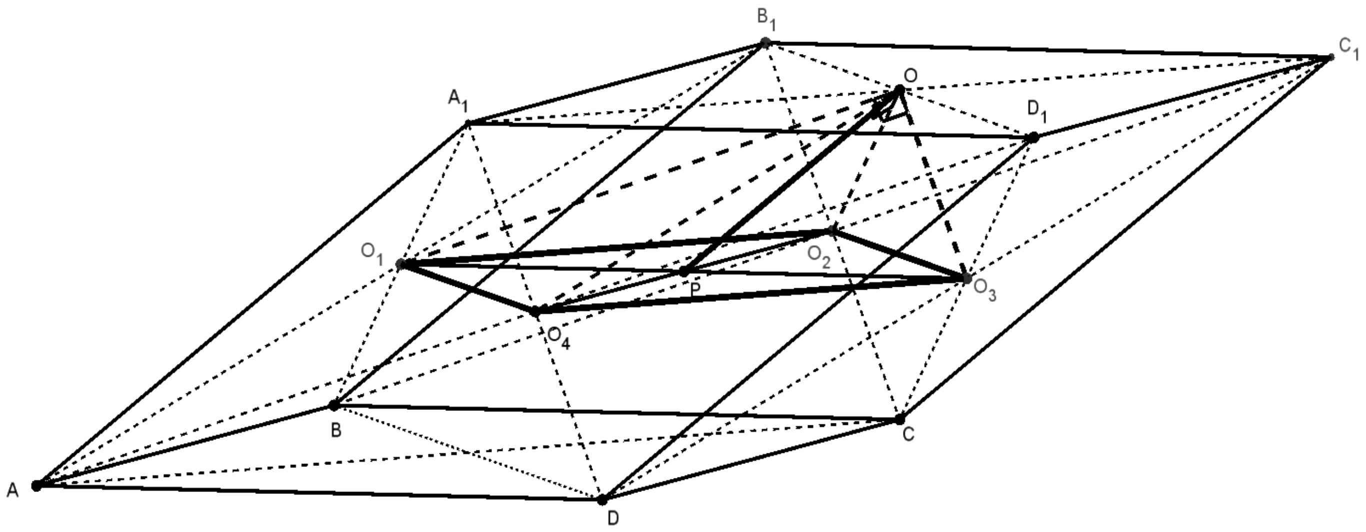
Показано, как за две операции оставить на доске одно число – 5 баллов.

11.3. Дан непрямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки O, O_1, O_2, O_3, O_4 – соответственно центры граней $A_1B_1C_1D_1$, AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1A_1A. Известно, что углы O_1OO_3 и O_2OO_4 – прямые. Докажите, что четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ – прямоугольник.

Первое решение. Пусть K, L, M – соответственно середины рёбер AA_1, A_1D_1, D_1D параллелепипеда. Из параллельности отрезков O_1O и KL, а также OO_3 и LM и условия задачи следует перпендикулярность средних линий KL и LM соответственно треугольников AA_1D_1 и A_1D_1D, то есть перпендикулярность диагоналей AD_1 и A_1D параллелограмма DD_1A_1A Значит, этот параллелограмм – ромб, и $A_1D_1 = AA_1$. Аналогично доказывается равенство рёбер A_1B_1 и AA_1. Итак, все рёбра параллелепипеда – равны. Тогда в ромбе $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны. Но стороны четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ параллельны этим диагоналям (например, O_1O_2 – средняя линия треугольника AB_1C). Значит, четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ – прямоугольник.

Второе решение. Угол O_1OO_3 – прямой, следовательно, $OP = \frac{O_1O_3}{2}$, где P – точка пересечения диагоналей параллелограмма $O_1O_2O_3O_4$. Аналогично, $OP = \frac{O_2O_4}{2}$. Отсюда следует равенство диагоналей O_1O_3 и O_2O_4 параллелограмма $O_1O_2O_3O_4$. А это означает, что он – прямоугольник.





Замечание. Первое решение даёт полное описание структуры параллелепипеда. Второе решение показывает, что в качестве точки O можно было взять произвольную точку, не лежащую в плоскости $O_1O_2O_3$.

Комментарий. Доказано равенство рёбер параллелепипеда – 3 балла.

11.4. Какие значения может принимать сумма $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z$, если известно, что выполняются равенства $\cos 2x = \operatorname{tg} y + 1$, $\cos 2y = \operatorname{tg} z + 1$, $\cos 2z = \operatorname{tg} x + 1$?

Ответ. 0 или 3.

Решение. Перепишем равенства в виде $-2\sin^2 x = \operatorname{tg} y$, $-2\sin^2 y = \operatorname{tg} z$, $-2\sin^2 z = \operatorname{tg} x$.

1. Если хотя бы один из синусов от x, y или z равен нулю, то остальные синусы также равны нулю. Тогда $\cos 2x = \cos 2y = \cos 2z = 1$. Откуда $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 3$. Этот случай реализуется, например, если $x = y = z = 0$.

2. Если синусы от x, y и z отличны от нуля, то перемножим три переписанных равенства. После преобразования получим $\sin 2x \cdot \sin 2y \cdot \sin 2z = -1$, откуда $|\sin 2x| = |\sin 2y| = |\sin 2z| = 1$. Значит, $\cos 2x = \cos 2y = \cos 2z = 0$, и $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$. Этот случай реализуется, например, если $x = y = z = -\frac{\pi}{4}$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Оба ответа получены подбором – 1 балл.

Обосновано найден только один ответ из двух – 3 балла.

11.5. На столе лежат 170 карточек с числами от 1 до 170. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любую карточку. Игра заканчивается, когда на столе останется две карточки. Второй выигрывает, если числа на оставшихся карточках отличаются ровно на 10 или на число, делящееся на 11. Иначе выигрывает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй.

Первое решение. Опишем стратегию второго игрока. Пусть он разобьет карточки с числами от 6 до 165 на пары следующим образом: 6-16, 7-17, …, 15-25, 26-36, 27-37, …, 35-45, …, 155-165. Тогда в каждой такой паре числа отличаются ровно на 10. Карточки с числами от 1 до 5 и от 166 до 170 ему нужно разбить на пары так: 1-166, 2-167, 3-168, 4-169, 5-170. В каждой такой паре числа отличаются ровно на 165, то есть на число, делящееся на 11. Каждым ходом второму игроку следует брать карточку из той пары, из которой только что взял карточку первый игрок. Поэтому после каждого хода второго игрока количество пар будет уменьшаться на одну. В конце игры на столе останется одна пара карточек. Числа в ней отличаются на 10 или на число, делящееся на 11. Поэтому второй игрок выиграет.

Второе решение. Докажем, что второй игрок может добиться того, чтобы остались две карточки с числами, разность которых делится на 11. Заметим, что есть по 16 карточек, числа на которых имеют остатки 1, 2, 3, 4, 5 при делении на 11 и по 15 карточек, с числа на которых имеют остатки 0, 6, 7, 8, 9, 10 при делении на 11. Для карточек с остатками 1-5 второй игрок должен убирать карточку с тем же остатком. Первый раз для остатка 0 нужно убрать карточку с остатком 6 (и наоборот), далее с тем же остатком. Аналогично для 7 и 8, 9 и 10. Тогда после какого-то хода второго чисел с каждым остатком будет чётное количество.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.