11 класс

1. В городе НИЦЦАПИЦЦА испекли огромную пиццу на карнавал. После этого четыре мастера нарезки начали быстро резать её на куски (начинал кто-то один). Пабло умеет резать полученный пирог или кусок пирога на 8 частей, Алехандро — на 15 частей, Серджио — на 22 части, а Петруччо — на 29 частей. Когда пиццу разрезали, Арлекин подсчитал, что общее количество кусков равно 2023. Алехандро уверяет, что он ошибся. Кто прав?

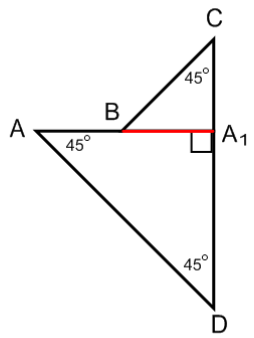
Ответ: прав Алехандро.

Решение. После того, как режет Пабло, каждый раз кусков пиццы становится больше на 7. После Алехандро — на 14 кусков, после Серджио — на 21 кусок, после Петруччо — на 28 кусков. Все эти числа делятся нацело на 7. Следовательно, общее количество кусков должно иметь тот же остаток от деления на 7, что и первоначальное количество кусков. Пицца была одна, остаток от деления на 7 равен 1. У числа 2023 остаток от деления на 7 равен 0. Противоречие. Арлекин ошибся.

2. Углы A, C и D четырёхугольника ABCD равны по 45^0. Известно, что $AD \neq CD$. Найдите площадь этого четырёхугольника, если $BD = 4$.

Ответ: 8.

Решение. Продлим AB до стороны DC, отметим точку A_1. Получим два прямоугольных равнобедренных треугольника (в каждом по 2 угла величиной 45^0), AA_1D и BA_1C. Пусть $A_1C = x$ и $AB = y$. Тогда $A_1B = x$, $A_1D = x + y$.



В прямоугольном треугольнике A_1BD квадрат гипотенузы BD равен $(x+y)^2 + x^2 = 16$.

А площадь четырёхугольника ABCD равна сумме площадей треугольников DAA_1 и BA_1C:

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

3. Четырёхзначное число, состоящее из различных ненулевых цифр, делится на число, образованное своими первыми двумя цифрами, а также на число, образованное своими последними двумя цифрами. Докажите, что оно делится либо на 3, либо на 13.

Решение. Пусть А — число, образованное первыми двумя цифрами исходного числа Х, В — число, образованное его последними двумя цифрами. Тогда Х = 100А + В. Из условия следует, что Х делится на А и на В. Значит, (100А + В) делится на А. Отсюда В делится на А, и, значит, В = кА, причём к ≠ 1, т.к. все цифры числа Х различны.

Кроме того, (100А + В) делится на В, т.е. 100А делится на В = кА и, значит, к – делитель 100. При этом к < 10, иначе В – не двузначное число (цифры числа Х ненулевые). Поэтому к может быть равно только 2, 4 или 5. Тогда Х равно либо 102А (делится на 3), либо 104А (делится на 13), либо 105А (делится на 3).

4. Решите уравнение: $x^2 + 2x\ sinxy + 1 = 0$.

Ответ: множество пар вида $(1;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ и $(-1;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, где $k, n \in Z$.

Решение. Заменим единицу, используя основное тригонометрическое тождество. Получим:

$$x^2 + 2x\ sinxy + sin^2xy + cos^2xy = 0$$

Тогда $(x + sinxy)^2 + cos^2xy = 0$.

Получаем: $(x + sinxy)^2 = 0$ (*) и $cos^2xy = 0$ (**). Из (**) получаем, что $sinxy = \pm 1$.

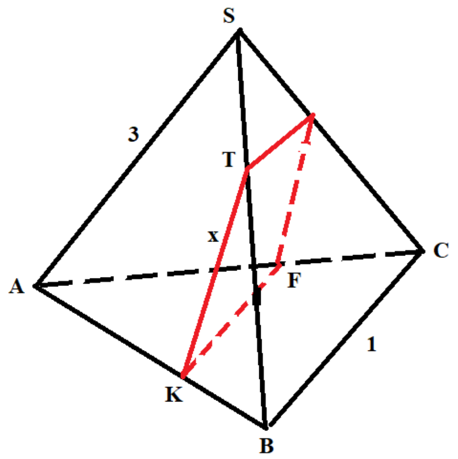
Тогда, если $sinxy = -1,$ значит, $x = 1,$ то $siny = -1$ и $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

если $sinxy = 1,$ значит, $x = -1,$ то $siny = -1$ и $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in Z$.

5. В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра в 3 раза больше рёбер основания. Найдите отношение периметра основания и периметра квадратного сечения этой пирамиды.

Ответ: отношение периметров равно 1.

Решение. Треугольная пирамида имеет 4 грани, значит, в каждой грани будет лежать одна сторона квадратного сечения. Одна сторона квадрата лежит на грани АВС, параллельная ей сторона — на одной из боковых граней. Без уменьшения общности считаем, что на грани BSC. Эти стороны параллельны, значит, они будут параллельны ребру ВС (свойства параллельных прямых в пространстве). Аналогично, на гранях ASC и ASB будут лежать стороны квадрата, параллельные ребру AS.



Скрещивающиеся рёбра AS и BC в правильной пирамиде перпендикулярны, поэтому углы нашего сечения прямые. Рассмотрим грань ASB. Три вершины сечения на рёбрах пирамиды — точки T, K, F. Пусть сторона квадрата равна x. В основании правильной пирамиды лежит правильный треугольник и сторона квадрата KF ∥ BC, поэтому треугольник AKF равносторонний и AK = x. Пусть AC = 1, тогда AS = 3. KT ∥ AS. Из подобия треугольников KTB и ASB получаем: $\frac{x}{3} = \frac{1-x}{1}$. Тогда $x = \frac{3}{4}$. Периметр основания пирамиды равен 3, периметр квадрата равен $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$. Отношение периметров равно 1.