11 класс

11.1. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2x^2+1)\right)+\cos(3\pi x^2)=0$.

Ответ: $\frac{1}{2}$. **Решение**. Записав первое слагаемое как $\cos\pi x^2$ и преобразовав сумму косинусов в произведение, получим (после сокращения на $\pi/2$) две серии корней: $4x^2=2m+1$ и $2x^2=2n+1$ (m,n – целые). Очевидно, наименьшие положительные корни каждой серии получаются при $m = n = 0$ и в первой серии это будет меньший корень $x=\frac{1}{2}$.

11.2. Решите уравнение $x^4+4+2x(x^2-2x+2)=0.$

Ответ: $-2\pm\sqrt{2}$. **Решение**. Разложим левую часть уравнения на множители, дополнив до полного квадрата: $x^4+4+2x(x^2-2x+2)=\left(x^4+4x^2+4\right)-4x^2+2x(x^2-2x+2)=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2+$ $+2x(x^2-2x+2)=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)+2x(x^2-2x+2)=(x^2-2x+2)(x^2+4x+2)$.Тогда получим $(x^2+4x+2)(x^2-2x+2)=0$. Корнями первого множителя являются $-2\pm\sqrt{2}$, а второй множитель имеет отрицательный дискриминант. *Комментарий: разложить левую часть уравнения на множители можно было также, если разделить уголком* (x^4+4) *на* (x^2-2x+2).

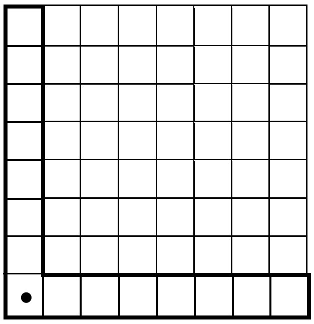
11.3. Дан треугольник *ABC*. Обозначим через r_A радиус окружности, проходящей через *A* и касающейся стороны *BC* в её середине. r_B и r_C определяются аналогично (как радиусы окружностей, проходящих через вершину и касающихся противоположной стороны в её середине). Можно ли утверждать, что треугольник *ABC* равносторонний, если известно, что $\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C}=\frac{2}{r}$, где r – радиус вписанной окружности треугольника *ABC*?

Ответ: Можно. **Решение.** Рассмотрим окружность, которая проходит через *A* и касается *BC* в точке *D* – середине *BC*. Диаметр этой окружности не меньше, чем хорда *AD*, а хорда *AD* не меньше, чем высота h_A треугольника, проведенная из вершины *A*. Таким образом, $h_A\le 2r_A$, причем данное нестрогое неравенство превращается в равенство лишь в случае, когда высота проходит через центр окружности и является медианой. Заметим, что в любом треугольнике имеет место равенство $\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}=\frac{1}{r}$, которое равносильно равенству $\frac{2S}{h_A}+\frac{2S}{h_B}+\frac{2S}{h_C}=\frac{2S}{r}\Leftrightarrow a+b+c=P$ (где P – периметр.). Итак, если выполняется соотношение из условия задачи, то все высоты треугольника являются медианами и значит, треугольник равносторонний.

11.4. Существуют ли такие иррациональные числа x, y, что оба числа $(x^3-3x^2y+xy^2+1)$ и $(x^2-3xy+y^2)$ рациональные?

Ответ: существуют. **Решение.** Поскольку $x^3-3x^2y+xy^2+1=x(x^2-3xy+y^2)+1$, то если мы найдем иррациональные числа x, y, для которых выражение в скобке $(x^2-3xy+y^2)$ равно нулю, то оба числа $(x^3-3x^2y+xy^2+1)$ и $(x^2-3xy+y^2)$ будут рациональными. Решая уравнение $x^2-3xy+y^2=0$ как квадратное относительно x, получаем $x=\frac{3y\pm y\sqrt{5}}{2}$. Тогда для иррациональных чисел $y=2\sqrt{5},\ x=3\sqrt{5}+5$ будут выполняться равенства $x^3-3x^2y+xy^2+1=1$ и $x^2-3xy+y^2=0$.

11.5. В некоторые клетки шахматной доски 8×8 поставлены шашки. Для каждой из 64 клеток подсчитали число шашек в 15 клетках, находящихся с этой клеткой в той же строке или том же столбце. Могло ли оказаться так, что все эти 64 числа четные?



Ответ. Не могло. **Решение**. Для данной клетки A будем называть A-крестовиной все 15 клеток в той же строке или столбце, что и A (считая и саму клетку A). Неполной A-строкой будем называть 7 клеток в той же строке, что и A, но без самой клетки A. Аналогично определяется неполный A-столбец. Докажем, что не может на всех 64 крестовинах число шашек оказаться четным.

Действительно, предположим противное и рассмотрим произвольные A- и B-крестовины с клетками A и B из одного столбца. Тогда при вычитании числа шашек на этих крестовинах получим, что в неполных A- и B-строках число шашек одинаковой четности. Аналогично, для двух клеток A и B из одной строки число шашек в неполных A- и B-столбцах одинаковой четности. Теперь рассмотрим какую-нибудь шашку на доске, пусть она находится в клетке A. Без ограничения общности можно считать, что A – угловая клетка (левая нижняя; этого можно добиться, переставив целиком на первое место строку и затем столбец, где находится A, при этом свойство четности для крестовин не меняется). По предположению, число шашек в A-крестовине четно, а значит, без самой шашки из клетки A число шашек на единицу меньше, и поэтому нечетно. Пусть для определенности число шашек в неполной A-строке (т.е. в первой строке), нечетно, а в неполном A-столбце (т.е. в первом столбце) четно. «Отрежем» от нашей доски каёмку из 15 клеток первой строки и первого столбца (см. рис.) и тогда на полученной доске 7×7 в каждой строке будет нечетное число шашек, а в каждом столбце – четное. Но это противоречит тому, что если подсчитать все шашки на этой доске 7×7 по строкам, то получится нечетная сумма (сумма семи нечетных чисел), а если по столбцам – то четная (сумма семи четных чисел). Противоречие доказывает наше утверждение.