Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный тур

2023 - 2024 учебный год

11 класс

Ответы и решения.

Максимальное количество баллов: 35.

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача №1

Верно ли, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1; 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нём не было фрагментов 11; 22; 33; 123 и 321?

Ответ: Верно.

Решение.

Пусть имеется **x** карточек с цифрой 1, **y** карточек с цифрой 2 и **z** карточек с цифрой 3. Тогда x + y + z = 100, и так как

$\frac{x+y-z}{2} + \frac{z+y-x}{2} + \frac{x+z-y}{2} = \frac{x+y+z}{2} = 50$,

то искомый ряд можно сложить из $\frac{x+y-z}{2} = 50 - z$ фрагментов 21,

затем $\frac{z+y-x}{2} = 50 - x$ фрагментов 32, а затем $\frac{x+z-y}{2} = 50 - y$ фрагментов 31.

При этом карточка с цифрой 1 встречается ровно (50 – z) + (50 –y) =100 – z – y = x раз,

карточка с цифрой 2 – ровно y раз, а карточка с цифрой 3 – z раз, причём запрещённые фрагменты в предложенном ряде не встретятся, даже, если какое – либо из значений x, y или z равно 50.

Ответ: Верно.

Задача №2

Сравните между собой наименьшие положительные корни многочленов

$(X^{2023} + 2023X - 1)$ и $(X^{2023} - 2023X + 1)$?

Ответ: Наименьший положительный корень многочлена $(X^{2023} + 2023X - 1)$ меньше, чем наименьший положительный корень многочлена

$(X^{2023} - 2023X + 1)$.

Первое решение.

Пусть $X_1 > 0$ – наименьший корень уравнения: $X^{2023} + 2023X - 1 = 0$.

То есть $X_1^{2023} + 2023 X_1 - 1 = 0$ – верное числовое равенство.

Пусть $X_2 > 0$ – наименьший корень уравнения: $X^{2023} - 2023X + 1 = 0$.

То есть $X_2^{2023} - 2023 X_2 + 1 = 0$ – верное числовое равенство.

Сложим почленно эти числовые равенства.

Получим,

$(X_1^{2023} + X_2^{2023}) + 2023(X_1 - X_2) = 0$,

$X_1 - X_2 = -(X_1^{2023} + X_2^{2023}) : 2023$.

Значит, $X_1 - X_2 < 0$ и $X_1 < X_2$.

Второе решение.

Функция X^{2023} принимает только положительные, функция $(2023X - 1)$ только отрицательные решения на интервале $(0; \frac{1}{2023})$.

Значит, уравнение $X^{2023} = 2023X - 1$ и многочлен $(X^{2023} + 2023X - 1)$ не имеют корней на этом интервале.

Многочлен $(X^{2023} + 2023X - 1)$ принимает на концах отрезка $\left[0; \frac{1}{2023}\right]$ значения разных знаков и, следовательно, имеет корень на интервале $(0; \frac{1}{2023})$.

Таким образом, наименьший положительный корень многочлена

$(X^{2023} + 2023X - 1)$ меньше, чем наименьший положительный корень многочлена $(X^{2023} - 2023X + 1)$.

Ответ: Наименьший положительный корень многочлена $(X^{2023} + 2023X - 1)$ меньше, чем наименьший положительный корень многочлена

$(X^{2023} - 2023X + 1)$.

Задача №3

Коробка содержит 900 карт, пронумерованных от 100 до 999. Павел вынимает карты из коробки случайным образом и вычисляет для каждой карты сумму написанных на ней цифр. Сколько карт нужно вытащить Павлу, чтобы быть уверенным, что среди них найдется хотя бы три карты с одинаковой суммой цифр?

Ответ: 53 карты.

Решение.

Суммы цифр номеров карт могут меняться от 1 (для номера 100) до 27 (для номера 999).

Среди имеющихся 900 карт сумму 1 имеет лишь карта 100, сумму 27 – лишь карта 999, а для всех остальных сумм (от 2 до 26) можно найти не менее трех карт, сумма цифр номеров которых равна этой сумме (например, сумму 2 имеют карты 101, 110 и 200).

Предположим, что Павел вынул сначала 27 карт и обнаружил, что суммы цифр их номеров имеют значения от 1 до 27. Если Павел вынет еще 25 карт, то может случиться, что он вытянул карты с суммами цифр номеров от 2 до 26, и у него по-прежнему нет трех карт с одинаковой суммой номеров.

Таким образом, 52 карт Павлу может не хватить.

В то же время, если он вытянет 53 карты, то среди них обязательно найдутся три с одинаковой суммой.

Докажем это:

предположим, что среди 53 карт нет трех с одинаковой суммой.

Тогда всего карт не больше, чем 1 (карта 100) + (25 карт с суммами от 2 до 26) + 1 (карта 999) = 52, но у нас 53 карты.

Получаем противоречие, значит, наше предположение, что среди 53 карт нет трех с одинаковой суммой, неверно, что и требовалось доказать.

Ответ: 53 карты.

Задача №4

Фигура «принц» может ходить на одну клетку вверх или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали влево вниз. Может ли «принц», начиная из левого нижнего угла доски 8*8 клеток, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

Ответ: Невозможно.

Первое решение.

Нет, "принц" не может обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу.

Для того, чтобы обойти все клетки доски по одному разу, необходимо, чтобы каждое движение "принца" меняло цвет клетки, на которой он находится (черный или белый).

Однако, начиная из левого нижнего угла доски, каждое следующее движение "принца" делает его оказывающимся на клетке того же цвета, на которой он уже побывал.

Поэтому, обойти всю доску, побывав на каждой клетке ровно по одному разу, **невозможно.**

Второе решение.

Занумеруем горизонтали доски снизу вверх числами 0, 1, …, 7 и вертикали доски слева направо теми же числами.

Каждой клетке доски поставим в соответствие сумму номеров по вертикали и горизонтали, на пересечении которых эта клетка находится.

«Принц» начинает свой путь в клетке, которой соответствует число 0.

При каждом ходе «принца» число x, соответствующее клетке, на которой он находится, либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 2, поэтому остаток от деления на 3 числа x изменяется в следующей последовательности: 0, 1, 2, 0, 1, 2, …

Предположим, что «принц» обошел всю доску, побывав в каждой клетке по одному разу. Разобьем оставшиеся после отбрасывания начальной клетки 63 клетки на 21 тройку клеток. Идущих подряд по ходу «принца».

Тогда в каждой тройке ровно одной клетке соответствует число, кратное 3, т. е. всего должна иметься 21 такая клетка.

Однако на самом деле таких клеток имеется лишь 20 (для этого нужно лишь расставить числа 0, 1, 2 на шахматной доске и посчитать число нулей без начальной клетки).

Полученное противоречие доказывает, что «принц» не может обойти всю доску, побывав в каждой клетке по одному разу.

Ответ: Невозможно.

Задача №5

Пересечь прямой две данные концентрические окружности так, чтобы они отсекали от этой прямой хорды, одна из которых в два раза больше другой.

Решение.

Пусть O - центр двух концентрических окружностей. Возьмём радиус OA большей окружности и найдём его середину B.

На AB как на диаметре строим полуокружность. Точку её пересечения с меньшей окружностью обозначим через C.

Прямая АС и будет искомой. Докажем это. Соединим точки В и С и из точки О проведём перпендикуляр OD к прямой АС.

Так как ВС ⊥ АС (∠ ВСА опирается на диаметр АВ), OD ⊥ АС и ОА = 2ОВ то **DA = 2DC.**