Задания для обучающихся

Время выполнения заданий – 235 минут

Максимальное количество баллов – 42

1. Приведите пример нечетного четырехзначного числа, которое при делении на сумму своих цифр дает квадрат натурального числа.

2. Приложение доставки Walt рассчитывает время доставки, ориентируясь на среднюю скорость курьера в городе 30 км/час. Неопытный доставщик Оли первые 5 километров доставки проехал со скоростью ровно 30 км/час, но потом на 5 минут застрял на светофоре. С какой скоростью ему нужно проехать оставшиеся 5 километров, чтобы соблюсти время доставки, установленное приложением?

3. Что больше $\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$?

4. На доске написано неравенство $\sqrt{x^2+2ax+a^2} \le x-b^2$. Сначала Петя заменяет параметр a некоторым числом, а затем Вася заменяет параметр b. Может ли Петя так выбрать значение a, чтобы при любых действиях Васи полученное неравенство не имело решений?

5. Через точку C, лежащую вне окружности с центром в точке O, провели касательную, касающуюся окружности в точке A, и секущую, пересекающую окружность в точках M и N. Из точки A опустили перпендикуляр AB на прямую CO (B – основание перпендикуляра). Докажите, что точки M, B, O, N лежат на одной окружности.

6. 72 последовательных натуральных числа разбили произвольным образом на 18 групп по 4 числа в каждой. Затем в каждой группе посчитали произведение чисел и у каждого произведения посчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы быть равными?

Материалы для членов жюри (ключи, критерии оценивания)

1. Приведите пример нечетного четырехзначного числа, которое при делении на сумму своих цифр дает квадрат натурального числа.

   Решение: Подходит, например, число 2023, поскольку частое от деления на 7 равно $289=17^2$. Есть и другие примеры.

   Критерии проверки: Любой верный пример с проверкой – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

2. Приложение доставки Walt рассчитывает время доставки, ориентируясь на среднюю скорость курьера в городе 30 км/час. Неопытный доставщик Оли первые 5 километров доставки проехал со скоростью ровно 30 км/час, но потом на 5 минут застрял на светофоре. С какой скоростью ему нужно проехать оставшиеся 5 километров, чтобы соблюсти время доставки, установленное приложением?

   Ответ: 60 км/ч.
   Решение: Планируемое время доставки составляет 10/30=1/3 ч. Первые 5 км доставщик проехал за 5/30 ч, на светофоре простоял 5/60 ч. Пусть x – искомая скорость на второй половине пути. Тогда получаем уравнение $5/30 + 5/60 + 5/x = 1/3$, из которого находим корень x=60 км/ч.

   Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, ход решения верный, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – **5 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

3. Что больше $\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$?

   Ответ: первое число больше.

   Решение: Требуется сравнить величины: $\cos\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Очевидно, что $\frac{1}{2}$ радиан и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ радиан – углы первой четверти, на этих промежутках функция $y=\sin x$ возрастает, а $y=\cos x$ убывает. Заметим, что $\frac{1}{2}<\frac{\pi}{6}$, значит

$\cos\left(\frac{1}{2}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Также легко показать, что $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{3}$, а значит $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, первое число больше.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, ход решения верный, но недостаточно обоснованы неравенства типа $\cos\left(\frac{1}{2}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и/или $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ – **5 баллов**. В решении используются верные неравенства типа $\cos\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$, которые никак не обоснованы, получен верный вывод – **3 балла**. Решение неверно или только ответ – **0 баллов.**

4. На доске написано неравенство $\sqrt{x^2 + 2ax + a^2} \le x - b^2$. Сначала Петя заменяет параметр *a* некоторым числом, а затем Вася заменяет параметр *b*. Может ли Петя так выбрать значение *a*, чтобы при любых действиях Васи полученное неравенство не имело решений?

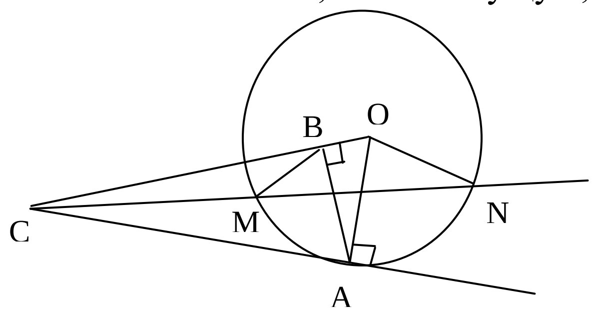
Ответ: Может.

Решение: Перепишем неравенство в виде $|x+a| \le x - b^2$ и рассмотрим графическую интерпретацию. График функции в левой части – это график функции $y = |x|$, сдвинутый на $|a|$ вправо, если $a < 0$, либо на *a* влево, если $a > 0$. График линейной функции из правой части – это график функции $y = x$, при *b*=0, либо сдвинутый вниз на b^2 во всех остальных случаях. Таким образом, очевидно, что если Петя заменит *a* каким-либо положительным числом, то при любых действиях Васи график первой функций будет расположен выше графика второй функции, значит, неравенство не будет иметь решений.

Комментарий: для полного балла также достаточно выбрать конкретное положительное значение параметра *a* и доказать, что при всех *b* полученное неравенство не будет иметь решений (графически или аналитически).

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, подходящее значение *a* указано верно, но решение не достаточно обосновано – **5 баллов**, указано подходящее значение *a* без обоснования – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

5. Через точку C, лежащую вне окружности с центром в точке O, провели касательную, касающуюся окружности в точке A, и секущую, пересекающую окружность в точках M и N. Из точки A опустили перпендикуляр AB на прямую CO (B – основание перпендикуляра). Докажите, что точки M, B, O, N лежат на одной окружности.



Решение: Покажем, что четырехугольник *MBON* вписанный, доказав, что сумма углов *MBO* и *MNO* равна 180º. В прямоугольном треугольнике *CAO* *AB* – высота, поэтому выполняется $AC^2 = CB \cdot CO$. С другой стороны из свойства касательной и секущей $AC^2 = CM \cdot CN$. Таким образом, $CM \cdot CN = CB \cdot CO \Rightarrow \frac{CB}{CN} = \frac{CM}{CO}$. А так как в треугольниках *CMB* и *CON* угол *C* – общий, то эти треугольники подобны. Следовательно, углы *CNO* и *MBC* равны. Осталось заметить, что углы *MBO* и *MBC* – смежные, что и дает нужное равенство: $\angle MBO + \angle MNO = 180°$.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно – **0 баллов**.

6. 72 последовательных натуральных числа разбили произвольным образом на 18 групп по 4 числа в каждой. Затем в каждой группе посчитали произведение чисел и у каждого произведения посчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы быть равными?

Ответ: нет.

Решение: Предположим это возможно. Хотя бы в одной из четверок присутствует число кратное 9. Значит, сумма цифр хотя бы одного произведения делится на 9, а значит и суммы цифр произведений всех групп. Тогда произведения чисел в каждой четверке делится на 9, т.е. в ней либо найдется число кратное 9 (четверка 1-го типа), либо два числа кратные 3, но не кратные 9 (четверка 2-го типа). Заметим, что среди 72 последовательных чисел есть ровно 8 чисел, делящихся на 9, и ровно 16 чисел, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Следовательно, найдется не более 8 четверок 1-го типа и не более 8 четверок 2-го типа. Значит, 18 четверок не наберется.

Критерии проверки: Верное обоснованное решение – **7 баллов**, показано, что все произведения делятся на 9 – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.