

### Критерии оценивания выполнения олимпиадных заданий по математике в 11 классе

Решение каждого задания оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Общая оценка за весь этап получается суммированием баллов по каждому из заданий. Максимальное количество баллов за муниципальный этап – 35. Альтернативные способы решения задачи, не учтенные составителями задач в рекомендациях, при условии их правильности и корректности также оцениваются в полной мере. Ниже представлена общая схема оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Выставление премиальных баллов (оценка за задание более 7 баллов) на муниципальном этапе не допускается.

Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценить степень ее правильности и полноты.

Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

Баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.

Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов.

1. Монету подбрасывают 90 раз (вероятность выпадения орла и решки в каждом броске одинаковы). Пусть  $p$  – вероятность того, что орёл выпадет не меньше 55 раз, а  $q$  – вероятность того, что орёл выпадет меньше 35 раз. Найдите  $p-q$ .

**Решение.**

В силу того, что выпадение орла и решки равновозможны, вероятность получить 90 орлов равна вероятности выпадения 90 решек (то есть 0 орлов); вероятность получить 89 орлов равна вероятности получить 89 решек (то есть одного орла) и т.д. Обозначим вероятность выпадения ровно  $k$  орлов через  $p_k$ . Тогда  $p = p_{55} + p_{56} + \dots + p_{90}$ ,  $q = p_0 + p_1 + \dots + p_{34}$ , а в силу сказанного выше,  $q = p_{90} + p_{89} + \dots + p_{56}$ . Значит,  $p - q = p_{55}$ .

Посчитаем вероятность того, что орёл выпадает ровно 55 раз при 90 бросках.

Если обозначить выпадение орла единицей, а выпадение решки нулём, то каждую последовательность из 90 бросков можно охарактеризовать последовательностью цифр из нулей и единиц. Вероятность получить любую из таких последовательностей равна  $\frac{1}{2^{90}}$ .

Нас устроят все те последовательности событий, которые содержат ровно 55 единиц. Их количество равно  $C_{90}^{55}$  (выбираем из имеющихся 90 позиций 55 позиций для единиц, после чего остальные позиции заполняются нулями). Значит, вероятность получить хотя бы одну такую последовательность равна  $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{55}$ . Это и есть  $p_{55}$ .

*Замечание.* Поскольку  $C_{90}^{55} = C_{90}^{35}$ , то ответ можно записать также в виде  $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{35}$ .

**Ответ:**  $\frac{1}{2^{90}} \cdot C_{90}^{55}$

2. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа  $0, 1, 2, \dots, 7, 8, 7, 6, \dots, 2, 1$ . За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 в сумме набрал 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 1.

**Решение.**

Заметим, что игроки под номерами 1 и 9 сидят диаметрально противоположно друг другу, поэтому сумма набранных ими очков при каждом вращении всегда равна 8. Следовательно, за 13 вращений они в сумме набрали  $13 \cdot 8 = 104$  очка. Поскольку игрок номер 9 набрал 84 очка, сумма очков, набранных игроком номер 1, равна  $104 - 84 = 20$ .

**Ответ:** 20.

3. В соревнованиях на зимней круговой трассе принимают участие спортсмены на квадроциклах и снегоходах, соревнуются парами. Четверть круговой трассы засыпана рыхлым снегом, а остальная часть покрыта плотным настом. Скорость снегохода по рыхлому снегу - 32км/ч, по плотному - 36 км/ч. Скорость квадроцикла - 16 км/ч и 48 км/ч соответственно. Старт заезда находится в начале части трассы, покрытой рыхлым снегом. Кто из спортсменов первым обгонит другого и на каком по счёту своём круге?

**Решение.**

Пусть  $S$  км трассы покрыто рыхлым снегом, а  $3S$  км – плотным.

Тогда снегоход проезжает один круг за  $\frac{S}{32} + \frac{3S}{36} = \frac{11S}{96}$  ч, а квадроцикл – за  $\frac{S}{16} + \frac{3S}{48} = \frac{S}{8} = \frac{12S}{96}$  ч, то есть дольше.

На начальном участке скорость снегохода больше, чем квадроцикла, поэтому он сразу выйдет вперед и, проезжая каждый круг в целом быстрее квадроцикла, впоследствии совершит-таки обгон, причем непременно во время езды по участку с рыхлым снегом.

К моменту искомого первого обгона снегоход проезжает такое наименьшее целое число ( $n$ ) кругов и такое дополнительное расстояние  $kS \in (0;S)$  по рыхлому снегу для которых выполнены условия

$$\begin{cases} \frac{11S}{96}n + \frac{kS}{32} = \frac{S}{8}(n-1) + \frac{kS}{16} \\ k \in (0; 1) \end{cases}$$

$$n=12-3k; n \in (9; 12)$$

Наименьшее значение  $n$ , при котором описанные условия реализуются, равно 10, значит, к моменту этого обгона снегоход сделает  $n=10$  полных кругов и перейдет на 11-й.

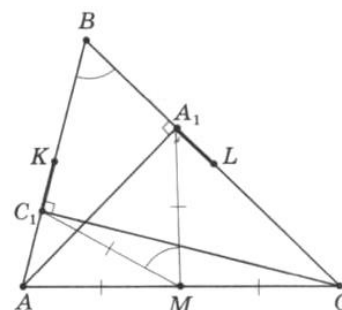
**Ответ:** спортсмен на снегоходе на своем 11-м круге обгонит спортсмена на квадроцикле (на его 10 – м круге).

4. Пусть  $AA_1$  и  $CC_1$ - высоты остроугольного неравнобедренного треугольника  $ABC$ , а  $K, L$  и  $M$ - середины сторон  $AB, BC$  и  $CA$  - соответственно. Докажите, что если  $\angle C_1MA_1 = \angle ABC$ , то  $C_1K=A_1L$ .

**Решение.**

Отрезок  $C_1M$  является медианой прямоугольного треугольника  $CC_1A$ , поэтому  $C_1M = \frac{AC}{2} = MA$ .

Тогда  $\angle C_1MA = 180^\circ - 2\angle BAC$ .  
Аналогично,  $\angle A_1MC = 180^\circ - 2\angle BCA$ .



Отсюда,  $\angle C_1MA + \angle A_1MC = 2(180^\circ - \angle BAC - \angle BCA) = \angle ABC$ , а тогда  $\angle A_1MC = 180^\circ - (\angle AMC + \angle CMA_1) = 180^\circ - 2\angle ABC$ .

Из условия следует, что  $\angle ABC = 180^\circ - 2\angle ABC$ .

Отсюда  $\angle ABC = 60^\circ$ .

По условию треугольника ABC – неравнобедренный; пусть  $AB < BC$ .

Тогда из прямоугольного треугольника  $ABA_1$  получаем  $BA_1 = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{AB}{2} < BL$ ,

Значит,  $A_1L = BL - BA_1 = \frac{BC - AB}{2}$

Аналогично,  $BC_1 = \frac{BC}{2} > BK$

$KC_1 = BC_1 - BK = \frac{BC - AB}{2} = A_1L$

Утверждение доказано.

5. Загадано несколько различных натуральных чисел. Известно, что сумма всех чисел будет равна 477 и в случае, если самое маленькое число увеличить в 32 раза и все числа суммировать, и в случае если самое большое число увеличить в 14 раз и все числа суммировать. Какие числа могли быть загаданы?

### Решение.

Пусть загадано  $n$  чисел  $x_1 < \dots < x_n$  ( $n \geq 2$ ).

Тогда  $32x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 + \dots + x_{n-1} + 14x_n$

Вычитая из обеих частей этого равенства сумму  $(x_1 + \dots + x_n)$ , получим  $31x_1 = 13x_n$

Так как числа 31 и 13 взаимно просты, то  $x_1 = 13k$ ,  $x_n = 31k$ .

Если  $k \geq 2$ , то  $32x_1 + \dots + x_n > 32x_1 \geq 32 \cdot (13 \cdot 2) > 477$ , что невозможно.

Поэтому  $k = 1$ , откуда  $x_1 = 13$ ,  $x_n = 31$ .

Тогда  $32x_1 + x_n = 32 \cdot 13 + 31 = 447$  и сумма оставшихся чисел равна  $477 - 447 = 30$ , причем оставшиеся числа больше 13 и меньше 31.

Если это число одно, то оно равно 30. Если их два, то различные натуральные числа с суммой 30 – это только 14 и 16. Больше двух чисел быть не может, так как их сумма превосходит  $13 \cdot 3 = 39$ .

**Ответ:** 13, 14, 16, 31 или 13, 30, 31.