Пермский край
2023-2024 учебный год

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
11 КЛАСС**

Время выполнения заданий — 235 минут (3 часа 55 минут).
Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий — 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

11.1. Шоколадка стоит целое число рублей. У Пети есть 11 сторублёвых купюр и меньше 100 рублей мелочью. У Васи есть 15 сторублёвых купюр и меньше 100 рублей мелочью. После того как Петя купил 9 шоколадок, а Вася — 13 шоколадок, у каждого из мальчиков закончились деньги. Сколько стоит шоколадка? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ. 123 рубля.

Решение. Если шоколадка стоит n рублей, то $1100 \leqslant 9n$ и $13n < 1600$. Из первого неравенства следует, что $n \geqslant 122 + \frac{2}{9}$, и так как n целое число, то $n \geqslant 123$. Из второго неравенства следует, что $n < \frac{1600}{13} = 123 + \frac{1}{13}$, значит $n \leqslant 123$. Остаётся заметить, что 123 рубля шоколадка может стоить, так как $9 \cdot 123 = 1107$ и $13 \cdot 123 = 1599$.

Комментарий. Дан верный ответ — 1 балл.

Выписана оценка $1100 \leqslant 9n$ — 1 балл.

Доказана оценка $n \geqslant 122 + \frac{2}{9}$ — 2 балла.

Доказана оценка $n \geqslant 123$ — 3 балла.

Баллы по трём предыдущим пунктам не суммируются.

Выписана оценка $13n < 1600$ или оценка $13n \leqslant 1599$ — 1 балл.

Доказана оценка $n < 123 + \frac{1}{13}$ — 2 балла.

Доказана оценка $n \leqslant 123$ — 3 балла.

Баллы по трём предыдущим пунктам не суммируются.

Замечание. Из условия следует, что у каждого мальчика целое число рублей (например, у Пети $9n$ рублей). Поэтому, если этот факт используется, но явно не проговаривается, баллы за это не снижаются.

11.2. Существует ли такой многочлен P, что его степень не ниже 1 и $P(\cos x) = P(\sin x)$ для любого действительного x?

Ответ. Да.

Решение. Например, годится многочлен $P(t) = t^2(1-t^2)$. Действительно, $P(\cos x) = \cos^2 x(1 - \cos^2 x) = \cos^2 x \cdot \sin^2 x = \sin^2 x(1 - \sin^2 x) = P(\sin x)$.

Комментарий. Только ответ «да» — 0 баллов.

Приведён любой подходящий многочлен и доказано, что он удовлетворяет условию — 7 баллов.

Приведён любой подходящий многочлен, но нет проверки того, что он удовлетворяет условию — 5 баллов.

Замечание. Подходящий многочлен не единственен.

11.3. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Сторонами, противоположными вершинам A, B, C, D, E, мы называем соответственно отрезки CD, DE, EA, AB, BC. Медианой пятиугольника будем называть отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной этой вершине стороны. В пятиугольнике нашлись четыре медианы, каждая из которых делит его на два четырёхугольника одинаковой площади. Докажите, что все пять медиан обладают этим свойством.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что ни одна из 4 медиан в условии не выходит из вершины E. Рассмотрим медиану AA_1. Отметим сразу, что по условию $S_{AA_1DE} = S_{AA_1CB}$. Так как у треугольников AA_1D и AA_1C одинаковые высоты и равные основания (A_1 — середина DC), то площади этих треугольников равны (отметим, что так же доказывается равенство $S_{\triangle EE_1C} = S_{\triangle EE_1B}$, где E_1 — середина BC). Но значит $S_{\triangle ADE} = S_{AA_1DE} - S_{\triangle AA_1D} = S_{AA_1CB} - S_{\triangle AA_1C} = S_{\triangle ACB}$. Аналогично доказывается равенство площадей пар треугольников, отсекаемых диагоналями, у которых общей вершиной будет B, C и D.

Это значит, что $S_{\triangle EBA} = S_{\triangle BCD} = S_{\triangle DEA} = S_{\triangle ACB} = S_{\triangle CED}$. Поэтому $S_{EE_1CD} = S_{\triangle CED} + S_{\triangle EE_1C} = S_{\triangle EBA} + S_{\triangle EE_1B} = S_{EE_1BA}$, но значит и медиана EE_1 делит площадь пятиугольника пополам.

Комментарий. Доказано, что $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ACB}$, или любое из симметричных ему равенств — 2 балла.

Доказано, что $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ACB}$ и $S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ECD}$, или любые симметричные варианты — 3 балла.

Баллы по предыдущим пунктам не суммируются.

11.4. Найдите все натуральные значения, которые может принимать число $\sqrt{n}+\sqrt{n+2023}$, если n является натуральным числом.

Ответ. 119, 289, 2023.

Первое решение. Пусть $\sqrt{n}+\sqrt{n+2023}=a$, тогда $\sqrt{n+2023}=a-\sqrt{n}$, и после возведения в квадрат получим, что $n+2023=a^2-2a\sqrt{n}+n$, $\sqrt{n}=\frac{a^2-2023}{2a}$. Предложим далее два способа доказать, что $2023 \vdots a$.

Способ 1. Так как a натуральное, то $\frac{a^2-2023}{2a}$ будет рациональным. Заметим, что если $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$, то $\sqrt{n}\in\mathbb{N}$. Действительно, если $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, то $nq^2=p^2$. Но тогда степень вхождения любого простого числа r в n должна быть чётной, иначе в левую часть равенства r будет входить в нечётной, а в правую — в чётной степенях. Но значит n будет точным квадратом и $\sqrt{n}\in\mathbb{N}$. Отсюда — $\frac{a^2-2023}{2a}$ целое, значит a^2-2023 делится на a, значит 2023 делится на a.

Способ 2. Так как $\sqrt{n}=\frac{a^2-2023}{2a}$, то $n=\frac{(a^2-2023)^2}{4a^2}$. Число n натуральное, значит $(a^2-2023)^2$ делится на a^2. Так как $(a^2-2023)^2=a^4-2\cdot 2023\cdot a^2+2023^2$, и $a^4-2\cdot 2023\cdot a^2=a^2(a^2-2\cdot 2023)$ делится на a^2, то и 2023^2 делится на a^2. Заметим, что если k^2 делится на m^2, то и k делится на m. Действительно, если степени вхождения простого числа p в k и m есть α и β соответственно, то из $k^2 \vdots m^2$ следует $2\alpha\geqslant 2\beta$, то есть $\alpha\geqslant\beta$ и $k \vdots m$. Отсюда следует, что 2023 делится на a.

Заметим, что $2023=7\cdot 17^2$, и так как a делитель 2023, то $a\in\{1,7,17,$ $7\cdot 17,17^2,7\cdot 17^2\}$. Также заметим, что $a^2>2023$ ($a^2-2023=\sqrt{n}\cdot 2a>0$). Поэтому единственные подходящие для нас a это $7\cdot 17$, 17^2 и $7\cdot 17^2$.

Легко убедиться, что по каждому такому a строится натуральное число n. Действительно, a^2-2023 будет положительным, чётным, и делящимся на a. Но значит $(a^2-2023)^2$ будет делиться на $4a^2$. Осталось заметить, что $\sqrt{n+2023}=\sqrt{n}-a$ не может иметь решений при положительных a, поэтому мы нашли решения именно исходного уравнения.

Второе решение. Заметим, что если x, y и a натуральные числа, и $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$, то x и y полные квадраты. Действительно, $\sqrt{x}=a-\sqrt{y}$, $x=a^2-2a\sqrt{y}+y$. Тогда $\sqrt{y}\in\mathbb{Q}$, что влечёт (по предыдущему доказательству) $y=m^2$, $m\in\mathbb{N}$. Аналогично доказывается, что $x=k^2$, $k\in\mathbb{N}$.

Итак, мы получаем, что $n=k^2$, $n+2023=m^2$, то есть $m^2-k^2=2023$, $(m-k)(m+k)=7\cdot 17^2$. У числа $7\cdot 17^2$ есть 6 натуральных делителей, поэтому $m+k$ — один из этих 6. При этом $m-k<m+k$, и в произведении они дают $7\cdot 17^2$. Это значит, что есть всего 3 возможных варианта выбора скобок, и для каждого из них k будет натуральным, так как делители числа $7\cdot 17^2$ нечётны (если $m-k=c$, $m+k=d$, $d>c$, то $k=\frac{d-c}{2}\in\mathbb{N}$).

Но значит n также будет натуральным. Итак, либо $a = m + k = 2023$, либо $a = m + k = 7 \cdot 17$, либо $a = m + k = 17^2$.

Комментарий. Дан верный ответ — 1 балл.

Доказано, что n — полный квадрат — 2 балла.

Доказано, что $2023 \,\vdots\, a$ — 2 балла.

Замечание. Можно явно указать, при каких n достигаются целые значения $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2023}$. Именно, 119 достигается при $n = 51^2$, 289 — при $n = 141^2$, 2023 — при $n = 1011^2$.

11.5. На плоскости выбрана 1001 точка так, что никакие три из этих точек не лежат на одной прямой. Каждая выбранная точка покрашена либо в красный, либо в синий, либо в зелёный цвета, при этом есть точка каждого из цветов. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причём из каждой точки выходит одинаковое число отрезков, и хотя бы один отрезок проведён. Докажите, что найдётся красная точка, которая соединена и с синей, и с зелёной точкой.

Первое решение. Допустим, что такой красной точки не найдётся. Тогда каждая красная точка соединена либо только с синими, либо только с зелёными точками. Пусть каждая точка соединена с k другими. Также пусть a красных точек соединены с синими, и b красных соединены с зелёными точками. Наконец, пусть всего есть n синих и m зелёных точек.

Из красных точек в синие суммарно идёт ak отрезков, из синих точек суммарно выходит nk отрезков. Значит из синих в зелёные идёт $nk - ak$ отрезков. По тем же причинам из зелёных в синие идёт $mk - bk$ отрезков. Эти числа равны, поэтому $nk - ak = mk - bk$. Так как $k \neq 0$, то $n - a = m - b$, $n + b - a - m = 0$. Осталось заметить, что числа x и $-x$ одной четности, поэтому чётности чисел $n + b - a - m = 0$ и $n + b + a + m = 1001$ должны совпадать. Но эти числа разной чётности, значит наше предположение неверно, и найдётся красная точка из условия.

Второе решение. Допустим, что такой красной точки не найдётся. Тогда каждая красная точка соединена либо только с синими, либо только с зелёными точками. В первом случае перекрасим её в зелёный цвет, во втором — в синий. Заметим, что после перекраски у нас всё ещё соединены только точки разных цветов. Пусть каждая точка соединена с k другими. Если после перекраски у нас n синих точек, то зелёных будет $1001 - n$. Тогда из синих точек выходит nk отрезков, а из зелёных — $(1001 - n)k$. Так как это один и тот же набор отрезков, то $nk = (1001 - n)k$, $n = 1001 - n$, $2n = 1001$, что невозможно. Итак, мы пришли к противоречию, значит наше предположение неверно, и найдётся красная точка, которая соединена и с синей, и с зелёной точкой.