11 класс

1. Можно ли раскрасить все натуральные числа в 3 цвета так, чтобы сумма любых четырех чисел одного цвета имела бы этот же цвет?

   Решение. Можно. Например, так: красным цветом покрасим все числа кратные 3, зеленым цветом - числа, дающим при делении на 3 остаток 1, а синим цветом - числа, дающие при делении на 3 остаток 2. Тогда сумма любых четырех чисел, кратных 3, делится на 3, значит, она тоже красная. Сумма любых 4 чисел, дающих при делении на 3 остаток 1, тоже дает остаток 1, так как 1+1+1+1 = 3+1, значит, она тоже зеленая. Сумма любых 4 чисел, дающих при делении на 3 остаток 2 тоже дает остаток 2, так как 2+2+2+2 = 2·3 +2, значит, она тоже синяя. Таким образом, все натуральные числа покрашены в три цвета так, что сумма любых четырех чисел одного цвета имеет тот же цвет. Вот эта раскраска:

   1, **2**, *3*, 4, **5**, *6*, 7, **8**, *9*, 10, **11**, *12*, 13, **14**, *15*, 16, **17**, *18*, 19, **20**, *21*, 22, **23**, *24*, 25...

   Комментарий. Приведен пример верной раскраски без рассуждений об остатках – 4 балла.

2. В школьном буфете Андрей купил 4 пирожка, 10 бубликов и чашку чаю за 169 рублей, Борис купил 3 пирожка, 7 бубликов и чашку чая за 126 рублей. Сколько рублей заплатил Владимир за пирожок, бублик и чашку чая?

   Решение. Пусть пирожок стоит x р., бублик стоит y р., чашка чая стоит z р., тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 10y + z = 169, \\ 3x + 7y + z = 126 \end{cases}$$

   Из которой нужно найти сумму $x + y + z = S$. Выделим в каждом из уравнений системы эту сумму

$$\begin{cases} 3x + 9y + (x + y + z) = 169, \\ 2x + 6y + (x + y + z) = 126 \end{cases}$$

   Заметим, что в этих уравнениях можно выделить еще одно общее выражение $x + 3y = t$, получим

$$\begin{cases} 3(x + 3y) + (x + y + z) = 169, \\ 2(x + 3y) + (x + y + z) = 126 \end{cases}$$

В новых обозначениях получим систему линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 3t + S = 169, \\ 2t + S = 126. \end{cases}$$

Решая систему, получим $S = 40$, то есть $x + y + z = 40$, Владимир заплатил 40 р. **Ответ:** 40.

3. Натуральное число назовем представимым, если его можно представить в виде суммы $a + b + ab$, где a и b натуральные числа. Например, число 19 представимое, потому что $19 = 3 + 4 + 3 \cdot 4$. Сколько представимых чисел среди двузначных?

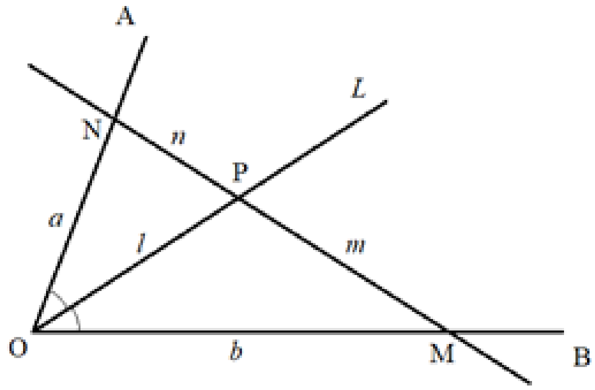
   Решение. Заметим, что если p - простое число, то число $p - 1$ нельзя представить в указанном виде. Действительно, попытаемся его представить, получим: $p - 1 = a + b + ab$, но тогда $p = a + b + ab + 1$ или $p = (a+1)(b+1)$. Так как a и b - натуральные числа, то множители $a+1$ и $b+1$ больше 1. Получается, что простое число p разложено на множители, отличные от единицы. Противоречие, значит, число $p - 1$ нельзя представить в таком виде. Из этого следует, что все числа, отличные от $p - 1$, можно представить в виде $a + b + ab$.

   Например, число 86 можно представить, потому что следующее за ним число 87 не простое, значит, оно составное. В самом деле, 87=3·29 - составное, $87 = (1 + a)(1 + b)$, значит, $1 + a = 3$, $1 + b = 29$, поэтому $a = 2$, $b = 28$, получим, что $86 = 2 + 28 + 2 \cdot 28$ - представимое число.

   В промежутке от 10 до 99 включительно находится 21 простое число: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Значит, числа, предшествующие этим простым: 10, 12, 16, . . . , 96 нельзя представить в нужном виде, и таких чисел тоже 21. Итак, среди всех двузначных чисел, а их 90 чисел, 21 число нельзя представить в виде, указанном в условии задачи, значит, представимых среди них 90 - 21 = 69. **Ответ:** 69.

4. На биссектрисе OL угла AOB выбрана точка P. Прямая p, проходящая через точку P, пересекает стороны угла OA и OB в точках N и M соответственно. Докажите, что значение $\dfrac{1}{ON} + \dfrac{1}{OM}$ не зависит от выбора прямой p.

   Решение. Обозначим $ON = a$, $OM = b$, $NP = n$, $MP = m$, $OP = l$, пусть $\angle AOL = \angle BOL = \alpha$. Покажем, что при любом выборе прямой p имеет место равенство $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2cos\alpha}{l}$.



По теореме косинусов имеем $n = \sqrt{a^2+l^2-2al\cos\alpha}$, $m = \sqrt{b^2+l^2-2bl\cos\alpha}$, а из свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $\frac{n}{a} = \frac{m}{b}$ или $\frac{n^2}{a^2} = \frac{m^2}{b^2}$. Из этих равенств получим цепочку равносильных равенств:

$$\frac{a^2+l^2-2al\cos\alpha}{a^2} = \frac{b^2+l^2-2bl\cos\alpha}{b^2};$$

$$\frac{l^2-2al\cos\alpha}{a^2} = \frac{l^2-2bl\cos\alpha}{b^2};$$

$$\frac{l-2a\cos\alpha}{a^2} = \frac{l-2b\cos\alpha}{b^2};$$

$$\frac{l(b^2-a^2)}{a^2b^2} = 2\frac{b-a}{ab}\cos\alpha;$$

$$\frac{l(b+a)}{ab} = 2\cos\alpha.$$

Окончательно получаем: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} = \dfrac{2\cos\alpha}{l}$. Это значит, что величина $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ не зависит от выбора прямой p.

5. Найдите все действительные значения параметра k, при которых неравенство

$$a^3+b^3+c^3+6 \geqslant k(a+b+c)$$

выполняется для всех действительных a, b, c, таких что $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 2$.

Решение. Так как неравенство должно выполняться при всех $a, b, c \geqslant -2$, то рассмотрим случай $a = b = c = -2$:$-8+(-8)+(-8)+6 \geqslant -6k$, значит $k \geqslant 3$.

Рассмотрим теперь случай $a = b = c = 1 \Rightarrow k \leqslant 3$. Итак, $k = 3$.

Докажем, что при $k = 3$ неравенство верно при $a, b, c \geqslant -2$.

Рассмотрим, сначала, функцию $f(t) = t^3 - 3t^2 + 2$. Нетрудно показать, что $f(t) = (t-1)(t^2+t-2) = (t-1)^2(t+2)$. Заметим, что $f(t) = (t-1)^2(t+2) \geqslant 0$ при $t \geqslant -2$.

Подставим $k = 3$ в исходное неравенство и докажем, что $a^3+b^3+c^3+6-3(a+b+c) \geqslant 0$. Итак, $a^3+b^3+c^3+6-3(a+b+c) = a^3-3a+2+b^3-3b+2+c^3-3c+2 = (a-1)^2(a+2)+(b-1)^2(b+2)+(c-1)^2(c+2) = f(a)+f(b)+f(c) \geqslant 0$, так как $f(t) \geqslant 0$ при $t \geqslant -2$.

Комментарий. Доказано, что $k = 3$ – 3 балла.