Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2023 – 2024 учебном году

Ответы и решения

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году

11 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. *До повышения цен чай с двумя пряниками стоил* 100 *рублей. Когда все цены выросли (на одинаковое число процентов)* 100 *рублей стало хватать ровно на чай и один пряник. Потом цены опять выросли на столько же процентов, как и в первый раз. Хватит ли после этого* 100 *рублей хотя бы на чай?*

Решение: Пусть цены выросли на $r\%$; $k = 1 + \dfrac{r}{100}$. Кроме того, пусть x и y — стоимости чая и пряника до повышения цен. Условие задачи записывается в виде системы

$$\begin{cases} x + 2y = 100, \\ k(x+y) = 100. \end{cases}$$

В задаче требуется сравнить величины k^2x и 100. Из системы имеем

$$100 = kx + ky = kx + k(50 - 0{,}5x) = 50k + 0{,}5kx.$$

Отсюда $x = \dfrac{200 - 100k}{k}$. Тогда

$$k^2x - 100 = k(200 - 100k) - 100 = 100(-k^2 + 2k - 1) = -100(k-1)^2 < 0,$$

так как $k \neq 1$ (цены повышались). Значит, после второго повышения чай будет стоить дешевле 100 рублей.

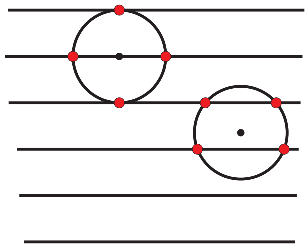
Ответ: непременно хватит.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно приведшая к неверному ответу	6 баллов
Условие задачи верно записано в виде системы уравнений	3 балла
Верный ответ получен в частных случаях	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

11.2. *Можно ли раскрасить плоскость в два цвета, красный и белый, так, чтобы на любой окружности радиуса* 1 *см было ровно четыре красные точки? Ответ обоснуйте.*

Решение: Разлинуем белую плоскость параллельными красными прямыми, находящимися на расстоянии 1 см друг от друга — см. рисунок.



К решению задачи 11.2

Полученная раскраска удовлетворяет условию задачи. Действительно, если центр окружности радиуса 1 см лежит на одной из красных линий, то окружность пересекает в двух точках эту линию и касается двух соседних с ней. Если же центр лежит внутри некоторой полосы, то окружность пересекает обе границы полосы (каждую в двух точках), но не достаёт до остальных прямых.

Ответ: можно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведена верная раскраска и доказано, что она удовлетворяет условию задачи	7 баллов
Приведена верная раскраска, но доказательство, что она искомая, неверно или отсутствует	5 баллов
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием, а также любые раскраски, не удовлетворяющие задаче	0 баллов

11.3. *Действительные числа x и y удовлетворяют равенству*

$$\left(x + \sqrt{x^2 + 2023}\right) \cdot \left(y + \sqrt{y^2 + 2023}\right) = 2023.$$

Чему равно $x + y$? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение:

Способ 1. *(с сопряжёнными выражениями)* Домножим и разделим левую часть уравнения на сопряжённое выражение к $x + \sqrt{x^2 + 2023}$. Получим

$$\frac{(x - \sqrt{x^2 + 2023}) \cdot (x + \sqrt{x^2 + 2023}) \cdot \left(y + \sqrt{y^2 + 2023}\right)}{x - \sqrt{x^2 + 2023}} = 2023;$$

$$-\frac{y + \sqrt{y^2 + 2023}}{x - \sqrt{x^2 + 2023}} = 1;$$

$$x + y = \sqrt{x^2 + 2023} - \sqrt{y^2 + 2023}. \tag{3}$$

Аналогично поступим с сопряжённым выражением к $y+\sqrt{y^2+2023}$ и получим

$$x+y=\sqrt{y^2+2023}-\sqrt{x^2+2023}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем $x+y=0$.

<u>Способ 2.</u> *(с параметром)* Будем считать число y параметром и рассмотрим уравнение относительно переменной x:

$$x+\sqrt{x^2+2023}=\frac{2023}{y+\sqrt{y^2+2023}}.$$

Докажем, что $x=-y$. Обозначим правую часть уравнения буквой c. Тогда

$$\sqrt{x^2+2023}=c-x \Rightarrow x^2=2023=c^2-2x+x^2 \Leftrightarrow x=\frac{c^2-2023}{2c}.$$

Так как

$$c=\frac{2023}{y+\sqrt{y^2+2023}}=\frac{2023(y-\sqrt{y^2+2023})}{y^2-y^2-2023}=\sqrt{y^2+2023}-y,$$

$$x=\frac{y^2+2023-2y\sqrt{y^2+2023}+y^2-2023}{2(\sqrt{y^2+2023}-y)}=-y.$$

Доказательство завершено.

<u>Способ 3.</u> *(с использованием тригонометрии)* Пусть

$$x=\sqrt{2023}\cdot\operatorname{tg}\alpha,\quad y=\sqrt{2023}\cdot\operatorname{tg}\beta,$$

где $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Тогда уравнение принимает вид

$$\left(\operatorname{tg}\alpha+\sqrt{tg^2\alpha+1}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}\beta+\sqrt{tg^2\beta+1}\right)=1.$$

В силу ограничений на α и β имеем

$$\sqrt{tg^2\alpha+1}=\frac{1}{\cos\alpha};\qquad \sqrt{tg^2\beta+1}=\frac{1}{\cos\beta},$$

поэтому

$$(\sin\alpha+1)\cdot(\sin\beta+1)=\cos\alpha\cos\beta \quad\Leftrightarrow\quad \sin\alpha+\sin\beta+2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}=0.$$

Посмотрим на левую часть уравнения, как на функцию от переменной α. На интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ она монотонно возрастает, а в точке $-\beta$ обращается в 0. Тогда $-\beta$ — её единственный корень на интервале. Значит, уравнение равносильно условию $\alpha+\beta=0$. Но тогда $\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\beta$ и $x=-y$.

Способ 4. *(с использованием элементов математического анализа)* Покажем, что для любого числа x существует единственное число y (равное $-x$), которое удовлетворяет уравнению из условия. Действительно, при $y = -x$ имеем

$$\left(x+\sqrt{x^2+2023}\right)\cdot\left(-x+\sqrt{x^2+2023}\right)=\left(\sqrt{x^2+2023}\right)^2-x^2=2023,$$

так что пара $(x; -x)$ удовлетворяет уравнению. С другой стороны, уравнение равносильно равенству

$$y+\sqrt{y^2+2023}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2023}}.$$

Рассмотрим функцию от переменной y, стоящую в левой части. Достаточно показать, что эта функция монотонна, так как монотонная функция не может иметь более одного корня. Её производная равна

$$\left(y+\sqrt{y^2+2023}\right)'=1+\frac{(y^2+2023)'}{2\sqrt{y^2+2023}}=1+\frac{y}{\sqrt{y^2+2023}},$$

значит, достаточно доказать неравенство

$$1+\frac{y}{\sqrt{y^2+2023}}>0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2+2023}>-y.$$

Но это неравенство очевидно ввиду того, что

$$\sqrt{y^2+2023}>\sqrt{y^2}=|y|\geqslant -y.$$

Ответ: $x+y=0$.

Примечание: В задаче не требуется обосновывать, что пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению из условия, существуют; достаточно доказать, что всякая такая пара обязана удовлетворять равенству $x+y=0$. В частности, нельзя требовать со школьника примера чисел x и y.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что для каждого конкретного числа y существует не более одного числа x, удовлетворяющего уравнению из условия	4 балла
Показано, что $x+y$ может равняться нулю ИЛИ что любая пара вида $x=t$, $y=-t$ удовлетворяет уравнению из условия	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

11.4. *В комнате* 8 *девочек и несколько мальчиков. Каждая девочка вручила булочку каждому знакомому мальчику. Каждый мальчик вручил по две булочки каждой незнакомой девочке. Каково максимально возможное количество мальчиков, если знакомства взаимные, а всего было роздано* 100 *булочек?*

Решение:

<u>Способ 1.</u> Пусть в комнате n мальчиков. Тогда всего пар мальчик–девочка $8n$. Пусть среди них k таких, в которых мальчик и девочка знакомы. Тогда количество булочек, врученных девочками мальчикам, равно k, а количество булочек, врученных мальчиками девочкам, равно $2(8n - k)$. По условию задачи

$$k + 2(8n - k) = 100 \Leftrightarrow k = 16n - 100.$$

Кроме того $0 \leqslant k \leqslant 8n$. Отсюда получаем (учитывая, что число n — натуральное), что $7 \leqslant n \leqslant 12$. Значит, мальчиков не больше 12.

Пусть их ровно 12. Тогда $n = 12$, $k = 92$. То есть, из 96 пар мальчик — девочка только 4 таких, в которых дарил подарок мальчик. Это, конечно, возможно, например, если один мальчик не был знаком с четырьмя девочками из 8, а все остальные мальчики знали всех девочек. Легко проверить, что при этом будет роздано ровно 100 булочек.

<u>Способ 2.</u> Давайте познакомим всех мальчиков со всеми девочками, с которыми они не были знакомы, и повторим ситуацию. Тогда общее число подаренных булочек уменьшится: вместо двух подарков от мальчика девочке появится один подарок от девочки мальчику и будет меньше 100. При этом дарить будут только девочки, каждая подарит булочек поровну, по количеству мальчиков. Если мальчиков 13, подаренных булочек будет 104, если больше — то и булочек больше. Значит, мальчиков меньше 13. Если мальчиков 12, то в повторной ситуации девочки подарят мальчикам 96 булочек, до 100 не хватает 4. Это значит, что в первоначальной ситуации ровно 4 пары мальчик — девочка не были знакомы между собой. И такая ситуация, очевидно, возможна.

Ответ: 12 мальчиков.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Условие задачи верно записано в виде уравнения, неравенства или системы уравнений в целых числах и приведён верный ответ	4 балла
Доказано, что количество мальчиков меньше 13	3 балла
Имеется модель задачи в виде двудольного графа и попытка оценить количество рёбер этого графа	2 балла
Верный пример (с указанием знакомств) на 12 мальчиков	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

11.5. *Докажите, что ровно одно из двух неравенств*

$$\sin x + \sin y - \sin(x+y) \leqslant 1{,}5 \quad \text{и} \quad \cos x + \cos y - \cos(x+y) \leqslant 1{,}5$$

выполнено при любых действительных числах x и y. Какое именно? Ответ обоснуйте.

Решение: При $x = y = \dfrac{\pi}{2}$ первое неравенство становится неверным: $1+1-0 < 1{,}5$. Покажем, что второе неравенство является тождеством, то есть выполняется для любых действительных чисел x и y.

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

поэтому

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \cos x + 2\sin\left(y + \frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} = \\ = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\left(y+\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2}.$$

Пусть $m = \sin\frac{x}{2}$, $n = \sin\left(y + \frac{x}{2}\right)$. Тогда неравенство принимает вид

$$1 - 2m^2 + 2mn \leqslant 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 2m^2 - 2mn + 0{,}5 \geqslant 0.$$

Нам требуется доказать это неравенство при любых $-1 \leqslant m, n \leqslant 1$. Посмотрим на него, как на неравенство относительно переменной m при фиксированном значении $n \in [-1; 1]$. Пусть $f(m) = 2m^2 - 2mn + 0{,}5$, и $m_0 = \dfrac{n}{2}$ — абсцисса вершины параболы $f(m)$. Имеем

$$f(-1) = 2{,}5 + 2n > 0; \qquad f(1) = 2{,}5 - 2n > 0; \qquad f(m_0) = 0{,}5 - \frac{n^2}{2} \geqslant 0.$$

Поэтому $f(m) \geqslant 0$ при любых $-1 \leqslant m \leqslant 1$, и неравенство $\cos x + \cos y - \cos(x+y) \leqslant 1{,}5$ выполнено при любых x, $y \in \mathbf{R}$.

Ответ: тождеством является второе неравенство.

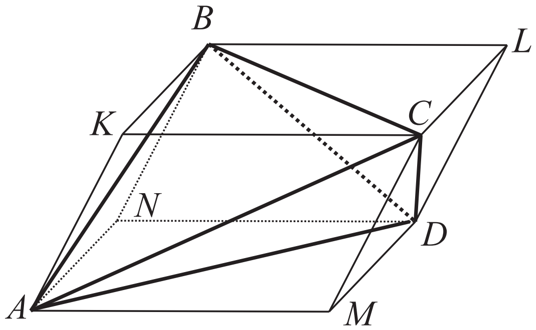
<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что второе неравенство является тождеством	5 баллов
Решение задачи верно сведено к доказательству неравенства, не содержащего тригонометрических функций	4 балла
Доказано, что первое неравенство не является тождеством	2 балла
Преобразования, не ведущие к решению	0 баллов

11.6. *В тетраэдре $ABCD$ рёбра AB и CD перпендикулярны; это же справедливо для рёбер AD и BC. Найдите длину ребра AD, если $AB = 10$, $BC = 11$, $CD = 5$. Ответ обоснуйте.*

Решение:

<u>Способ 1.</u> Проведём параллельные плоскости через скрещивающиеся прямые AD и BC — такая пара плоскостей существует и единственна. Такую же пару плоскостей проведём для прямых AB и CD и такую же пару плоскостей для прямых AC и BD. Пересекаясь, проведённые шесть плоскостей образуют параллелепипед; при этом рёбра тетраэдра будут являться диагоналями его граней. Обозначим остальные четыре вершины параллелепипеда так, как показано на рисунке.



К решению задачи 11.6

Диагонали AB и KN грани $AKBN$ перпендикулярны, так как $KN \parallel CD$. Но если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб. Значит, грани $AKBN$ и $MCLD$ — ромбы. Это же касается граней $ANDM$ и $BKCL$. Но тогда все рёбра параллелепипеда равны (а все его грани — ромбы). Сумма квадратов диагоналей любого параллелограмма равна сумме квадратов всех четырёх его сторон, поэтому

$$4a^2 = AB^2 + KN^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{и} \quad 4a^2 = AD^2 + MN^2 = AD^2 + BC^2,$$

где a — длина ребра параллелепипеда. Отсюда

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2.$$

Подставляя числовые значения из условия найдём, что $AD = 2$.

Способ 2. Введём систему координат. Пусть A — начало координат, ось абсцисс направим по прямой AB (тогда $B(10;\, 0;\, 0)$). Ось ординат направим так, чтобы точка C лежала в плоскости xOy и имела положительную ординату $C(m, n, 0)$ и

$$(m-10)^2 + n^2 = 121. \tag{1}$$

Ось аппликат направим так, чтобы точка D имела положительную аппликату. Чтобы CD было перпендикулярно AB, абсциссы точек C и D должны совпадать, поэтому $D(m, k, l)$. При этом

$$CD^2 = 25 = (n-k)^2 + l^2. \tag{2}$$

Перпендикулярность векторов $\overrightarrow{AD} = \{m, k, l\}$ и $\overrightarrow{BC} = \{m-10, n, 0\}$ приводит к равенству

$$m(m-10) + kn = 0. \tag{3}$$

Складываем соотношение (2) и удвоенное (3):

$$n^2 + l^2 + k^2 + 2m^2 - 20m = 25.$$

Вычитаем из полученного соотношение (1):

$$l^2 + k^2 + m^2 = 4.$$

Но выражение в левой части равно AD^2. Значит $AD = 2$.

Ответ: 2.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка, возможно приведшая к неверному ответу	6 баллов
Рассмотрен параллелепипед, для которого все рёбра тетраэдра являются диагоналями его граней ИЛИ условие задачи верно записано в координатной или векторной форме	3 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов