11 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

Ответ: 1010, 1011, 1012, 1013.

Решение. Заметим, что если в обеих группах есть по чётному числу, то оба произведения чётны, их разность чётна и не может равняться 2023. Поэтому в одной группе чётные, в другой – нечётные числа. Пусть эти числа $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Произведение в одной группе равно $(n-1)(n+1) = n^2-1$, в другой – $n(n+2) = n^2+2n$. Из условия следует, что

$$2023 = (n^2+2n) - (n^2-1) = 2n+1,$$

отсюда $n = 1011$. Поэтому искомые числа – 1010, 1011, 1012, 1013.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 1 балл. Рассмотрен только один (из трёх) способов разбиения на две группы — снимается 2 балла. Доказано, что числа можно разбить только на группы $n-1$, $n+1$ и n, $n+2$ — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

2. При каком наибольшем натуральном n число $n^8+n^6+n^4+n^2+100$ делится на $n+1$?

Ответ: $n = 103$.

Решение. Заметим, что $n^{2k}-1$ делится на n^2-1, так как

$$n^{2k}-1 = (n^2-1)(n^{2k-2}+n^{2k-4}+\ldots+n^2+1).$$

Отсюда следует, что каждое из выражений n^8-1, n^6-1, n^4-1, n^2-1 делится на $n+1$. Таким образом, исходное выражение

$$n^8+n^6+n^4+n^2+100 = (n^8-1)+(n^6-1)+(n^4-1)+(n^2-1)+104$$

делится на $n+1$ тогда и только тогда, когда 104 кратно $n+1$. Значит, наибольшее натуральное значение n равно 103.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Установлено, что каждое из чисел вида n^{2k} при делении на $n+1$ даёт остаток 1 — 2 балла. Доказано, что число $n = 103$ удовлетворяет условию, но не обосновано, что бóльших значений n нет — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. В некотором государстве было решено построить 30 новых городов на 20 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

Ответ: 380 *паромов.*

Решение. Пусть $x_1, \ldots, x_{20}$ — количество городов на каждом острове. Предположим, что существуют числа i и j такие, что $x_i \geqslant x_j > 1$, и рассмотрим произвольный город A на j-м острове. Число паромных сообщений из города A равно $30 - x_j$. Попробуем «перенести» город A на более заселённый i-й остров. Тогда на i-м острове будет x_i+1 городов и из города A будет выходить $30-(x_i+1)$ паромов, причём никакие другие паромные сообщения этот перенос не затронет. Но

$$30-(x_i+1) < 30-x_j \quad \Longleftrightarrow \quad x_j < x_i+1.$$

Другими словами, при переносе города на более заселённый остров *число паромных сообщений уменьшается*. Значит, наименьшее количество паромов получится, если на одном острове будет 11 городов, а на каждом из остальных 19 островов — по одному городу. В этом случае число паромных сообщений будет равно

$$11 \cdot 19 + \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 18 = 380.$$

Критерии. Правильно указана конструкция примера, но неправильно подсчитано число паромов — 2 балла. Пример с правильным подсчётом числа паромов — 3 балла. Доказано, что число паромных сообщений уменьшается при переносе города на более заселённый остров — ещё 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

4. Докажите, что если $(a+c)(a+b+c) < 0$, то

$$(b-c)^2 > 4a(a+b+c).$$

Решение. Рассмотрим квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2+(b-c)x+(a+b+c)$. Требуемое неравенство означает, что дискриминант $f(x)$ положителен, то есть трёхчлен $f(x)$ имеет различные корни.

Из условия задачи имеем

$$f(0) \cdot f(-1) = 2(a+b+c)(a+c) < 0,$$

то есть трёхчлен принимает значения разных знаков, и значит, $f(x)$ действительно имеет различные корни. (В случае совпадающих корней квадратный трёхчлен имеет вид $f(x) = a(x-x_0)^2$, то есть принимает значения или только неотрицательные, или только неположительные, что противоречит доказанному.)

Критерии. Использована идея вспомогательного трёхчлена $f(x)$ — 2 балла. Отмечено, что $f(0) = a+b+c$ или $f(-1) = 2(a+c)$ — ещё 1 балл. Доказано, что функция $f(x)$ принимает значения разных знаков — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AB, угол A равен $60°$. Окружность ω касается гипотенузы AB в точке O и проходит через точку C. Описанная окружность треугольника ABC и катет BC пересекают окружность ω соответственно в точках M и N, отличных от C. Найдите угол между прямыми MN и AB.

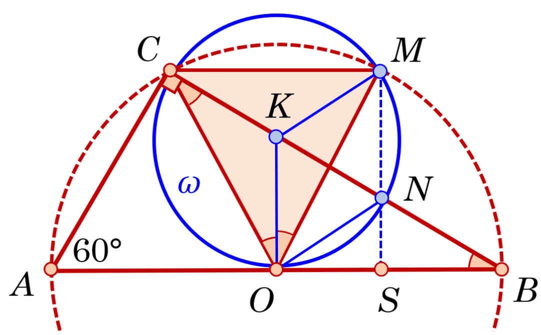

Рис. 7

Ответ: $90°$.

Решение. (Рис. 7.) Проведём перпендикуляр в точке O к гипотенузе AB до пересечения с катетом BC в точке K. Треугольники COM и COB — равнобедренные, так как $OC = OM = OB$ как радиусы описанной окружности треугольника ABC, поэтому $\angle OBC = \angle OCB = 30°$. Треугольник OAC — равносторонний, так как $OA = OC$ и $\angle OAC = \angle OCA = 90° - \angle OCB = 60°$.

Поэтому $\angle COK = 90° - 60° = 30° = \angle OCK$, и значит, $KC = KO$. Поскольку окружность ω касается сторон AB и AC, точка K — центр этой окружности, и поэтому $KM = KO = KC$. Это означает, что точка K — центр описанной окружности равнобедренного треугольника COM и лежит на биссектрисе (медиане и высоте) угла COM. Отсюда следует равенство треугольников COK

и KOM по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $\angle KOM = \angle KMO = \angle KOC = 30^\circ$ и $\angle COM = \angle COK + \angle KOM = 60^\circ$. Значит, треугольник COM — равносторонний, $\angle OKN = \angle KOC + \angle KCO = 60^\circ$. Аналогично, $\angle MKN = 60^\circ$, поэтому треугольники OKN и MKN — равносторонние, $\angle OMN = 60^\circ - \angle KMO = 30^\circ$, $\angle MOS = 90^\circ - \angle KOM = 60^\circ$.

В треугольнике OSM находим $\angle OSM = 180^\circ - \angle OMS - \angle MOS = 90^\circ$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что центр окружности ω совпадает с точкой K пересечения стороны BC и перпендикуляра к гипотенузе в точке O — 2 балла. Доказано, что треугольник COM равносторонний — ещё 2 балла. Доказано, что треугольники OKN и MKN равносторонние — ещё 2 балла. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.