Ключи к заданиям муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников 2023/24 учебного года по математике

Тула 2023

Список использованной литературы

Журналы:

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников».

Книги и методические пособия:

1. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Муниципальные олимпиады Московской области по математике. – М.: МЦНМО, 2019. – 400 с.

2. Агаханов Н. Х., Богданов И. И., Кожевников П. А., Подлипский О. К., Терешин Д. А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

3. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

4. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К. Математика. Районные олимпиады. 6–11 классы. – М.: Просвещение, 2010.

5. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

6. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

7. Адельшин А. В., Кукина Е. Г., Латыпов И. А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007–2009. – М.: МЦНМО, 2011.

8. Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я. Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95 (2-е издание, исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

9. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.

10. Блинков А. Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006-2013. – М.: МЦНМО, 2014.

11. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998–2006. – М.: МЦНМО, 2014.

12. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

13. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е издание, стереотипное). – М.: МЦНМО, 2013.

14. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

15. Гордин Р. К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

16. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

17. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.

18. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2013.

19. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.

20. Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс:

http://www.problems.ru/

Методические рекомендации для жюри муниципального этапа олимпиады по оцениванию работ участников

Общие критерии оценок приводятся в следующей достаточно условной таблице. К некоторым задачам имеются дополнительные комментарии к оцениванию.

Оценка	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1 – 2	Решения нет, но есть некоторые продвижения, которые являются частью решения.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Дан ответ к задаче без обоснования, если этот ответ не подсказан условием, не является очевидным и может задать направление поиска решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия и решения задач

11.1. Иван сыграл в следующую игру. Он взял 7 листов бумаги и разрезал некоторые из них на 7 частей каждый. Затем он смешал все куски вместе, взял некоторые из них и снова разрезал на 7 частей, и так далее. Закончив эту игру, он подсчитал количество всех кусочков бумаги (разного размера). Могло ли у него получиться 1001 кусков?

Ответ: нет.

Решение. Пусть на некотором шаге у Ивана было n кусков бумаги. После разрезания k кусков на 7 частей каждый у него станет $n - k + 7k = n + 6k$ кусков. Заметим, что при выполнении этого действия остаток от деления числа кусков на 3 не меняется, и, так как остаток от деления 7 на 3 равен 1, а остаток от деления 101 на 3 равен 2, то требуемое число кусков получить невозможно.

11.2. В целях информационной защиты рекомендовано периодически изменять пароль на телефоне. Петя решил обновить старый пароль (натуральное число, записанное в десятичной системе), приписав справа к нему две цифры. Оказалось, что полученное число в точности равно сумме всех натуральных чисел от 1 до старого пароля включительно. Какой пароль был изначально у Пети на телефоне?

Ответ: 199.

Решение. Пусть исходный пароль – натуральное число P, а приписанное справа число равно X.

Тогда вновь полученный пароль равен

$$P \times 100 + X\ .$$

С другой стороны, значение нового пароля равно сумме натуральных чисел:

$$1 + 2 + \cdots + P = \frac{P \times (P+1)}{2}.$$

Получаем

$$P \times 100 + X = \frac{P \times (P+1)}{2},$$

$$2X = P \times (P - 199).$$

Так как $0 \leq X \leq 99$, можем записать неравенство

$$0 \leq P \times (P - 199) \leq 198.$$

P – натуральное число, значит, левая часть неравенства выполняется при $P \geq 199$, а правая, при $P \leq 199$. Единственное возможное натуральное решение $P = 199$, а две приписанные цифры – нули.

11.3. На школьном ученическом совете собрались старосты из каждого класса. При этом оказалось, что если двое старост имеют среди других участников совета одинаковое количество друзей, то у них нет общих друзей. Докажите, что найдётся староста, который имеет ровно одного друга из числа участников совета.

Решение. Возьмём старосту A, число друзей у которого максимально (если таких учёных несколько, возьмём любого из них); обозначим это число через N. Каждый из N друзей учащегося A имеет хотя бы одного друга (A), имеет не более N друзей, и никакие двое не имеют равного числа друзей. Следовательно, эти люди имеют $1, 2, 3, \ldots, N$ друзей. В частности, один из них дружит только с A.

11.4. Дан тетраэдр $ABCD$. Обозначим через a, b и c – произведения длин его противоположных ребер. Можно ли построить треугольник со сторонами a, b и c?

Ответ: да.

Решение. Выберем на лучах AB, AC и AD точки B_1, C_1 и D_1 так, чтобы

$AB_1 = AC \cdot AD,\ AC_1 = AB \cdot AD,\ AD_1 = AB\ \cdot AC,$ (*)

Докажем, что треугольник $B_1C_1D_1$ удовлетворяет условиям задачи. Из (*) получаем, что $\frac{AB_1}{AC_1}=\frac{AC}{AB}$, поэтому $\Delta ABC \sim \Delta A_1C_1B_1$, следовательно, $\frac{BC}{C_1B_1}=\frac{AB}{AC_1}$. Откуда $B_1C_1 = BC\cdot\frac{AC_1}{AB} = BC\cdot AD$.

Аналогично, рассматривая подобные треугольники ACD и AD_1C_1, ABD и AD_1B_1, получим $C_1D_1 = CD\cdot AB$, $B_1D_1 = BD\cdot AC$.

Таким образом, треугольник $B_1C_1D_1$ удовлетворяет условию задачи.

11.5. Сумма всех корней уравнения

$$\cos^{100}x + a_1\cos^{99}x + a_2\cos^{98}x + \dots + a_{99}\cos x + a_{100} = 0,$$

расположенных на отрезке $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, равна 21π, а сумма всех корней уравнения

$$\sin^{100}x + a_1\sin^{99}x + a_2\sin^{98}x + \dots + a_{99}\sin x + a_{100} = 0,$$

расположенных на том же отрезке, равна 24π. Сколько корней на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ имеет первое уравнение?

Ответ: 18.

Решение. Заметим, что при замене x на $\frac{5\pi}{2}-x$ получаем, что $\sin x$ переходит в $\cos x$ и наоборот, при этом отрезок $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, переходит сам в себя. Следовательно, первое уравнение переходит во второе, причём каждому решению одного уравнения на указанном отрезке соответствует решение другого, сумма таких пар решений постоянна и равна $\frac{5\pi}{2}$. Но сумма всех решений этих двух уравнений на указанном отрезке равна $21\pi + 24\pi=45\pi$. Значит, каждое из этих уравнений на указанном отрезке имеет $45\pi : \frac{5\pi}{2} = 18$ решений. Но число решений первого уравнения (с косинусами) на отрезке $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ такое же, как и на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, поскольку $\cos(2\pi - x) = \cos x$. Таким образом, первое уравнение имеет 18 решений.