11 класс

1. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0$.

   Ответ: $-1 - \sqrt[3]{2}$.

   Решение. Запишем уравнение в виде $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = -2$. Тогда получим

   $$(x+1)^3 = -2 \Leftrightarrow x + 1 = -\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt[3]{2}.$$

   Критерии оценки.

   1) Ответ без решения оценивается в 0 баллов.
   2) Выделение полного куба в уравнении оценивается в 1 балл.

2. Пусть $S(N)$ – сумма цифр натурального числа N. Найдите все такие N, для которых справедливо равенство $N + S(N) = 2023$.

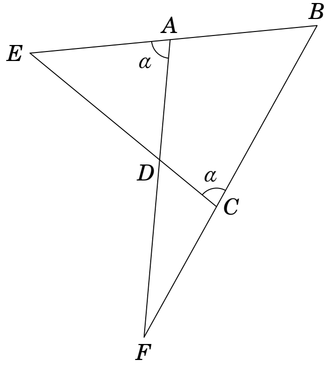
   Ответ: $1995, 2015$.

   Решение. Заметим, что искомое число четырёхзначное, т. е. $N = 1000a + 100b + 10c + d$. Следовательно, $1001a + 101b + 11c + 2d = 2023$. Если $a = 1$, то $101b + 11c + 2d = 1022$. В этом случае $b = 9$, $c = 9, d = 7$. Если $a = 2$, то $101b + 11c + 2d = 21$. Тогда $b = 0, c = 1$, $d = 5$.

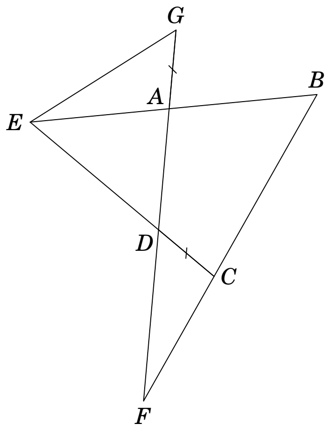
   Критерии оценки.

   1) Правильный ответ без обоснования, что других решений нет — 2 балла.
   2) Найден только один из вариантов — 0 баллов.

3. Вписанный четырёхугольник $ABCD$ не имеет параллельных сторон. Лучи BA и CD пересекаются в точке E, а лучи AD и BC — в точке F. Докажите, что если $AE = CF$, то $DE = DF$.



Решение (первый способ). Пусть $\angle EAD = \alpha$. Тогда $\angle BAD = 180^\circ - \alpha$, а так как $ABCD$ вписанный, то по сумме противоположных углов $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$, а $\angle FCD = 180^\circ - \alpha$. По теореме синусов для $\triangle ADE$ выполняется равенство $\frac{AE}{\sin \angle EDA} = \frac{DE}{\sin \alpha}$, откуда $DE = \frac{AE \sin \alpha}{\sin \angle EDA}$. А по теореме синусов для $\triangle CFD$ выполняется равенство $\frac{CF}{\sin \angle CDF} = \frac{DF}{\sin(180^\circ - \alpha)}$, откуда $DF = \frac{CF \sin(180^\circ - \alpha)}{\sin \angle CDF}$. Но так как $AE = CF$ (по условию), а $\angle EDA = \angle CDF$ (как вертикальные), то $\frac{AE \sin \alpha}{\sin \angle EDA} = \frac{CF \sin \alpha}{\sin \angle CDF}$, откуда $DE = DF$.



Решение (второй способ). На продолжении луча DA за точку A выберем точку G так, что $AG = DC$. Так как AE — общая, $AG = DC$

(по построению) и $\angle GAE = 180° - \angle DAE = \angle DCF$ (доказывается также, как в первом способе), то $\triangle GAE = \triangle DCF$ (по первому признаку), поэтому $\angle AGE = \angle CDF$. Но $\angle CDF = \angle ADE$. Тогда в треугольнике GDE два угла ($\angle DGE$ и GDE) равны, поэтому он равнобедренный, $GE = DE$. Но (из равенства треугольников GAE и DCF) $GE = DF$. Поэтому $DE = DF$.

Критерии оценки.

1) За доказательство промежуточного факта, что $\angle DCF = 180° - \angle EAD$, — ставить 1 балл.

4. На отрезке $[0,\ 1]$ числовой прямой расположены три точки a, b, c. Докажите, что найдётся точка x из отрезка $[0,\ 1]$ такая, что

$$\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x-b|} + \frac{1}{|x-c|} < 20.$$

Решение. Для каждой из трёх точек рассмотрим $0{,}15$-окрестность. Суммарная длина этих окрестностей будет $0{,}9 < 1$. Следовательно, на отрезке найдётся точка x такая, что расстояние от неё до любой из трёх точек больше $0{,}15$. Поэтому обратная величина каждого из расстояний будет меньше $\frac{100}{15}$, а их сумма меньше 20. Что и требовалось доказать.

Критерии оценки.

1) При решении задач перебором вариантов расположения чисел a, b, c на отрезке $[0,\ 1]$ и пропуске любого из вариантов — 0 баллов.

2) За арифметические ошибки снимается не более 1 балла.

5. Можно ли разбить множество чисел $1, 2, 3, \ldots, 2022, 2023$ на два, таким образом, чтобы сумма чисел одного подмножества равнялась произведению чисел второго?

Ответ: да.

Решение. Если число имеет вид $4n+3$, тогда сумма всех чисел от 1 до $4n+3$ равна $1+\cdots+(4n+3) = (4n+4)(4n+3)/2 = (2n+2)(4n+3)$.

Заметим, что верна формула: $(a-1)(b-1) = ab-(a-1)-(b-1)-1$. Отсюда понятно, что в нашем случае нужно убрать 3 числа: 1, $2n+{}$ $+1 = 1011$ и $4n+2 = 2022$, тогда оставшаяся сумма будет равна произведению убранных чисел, согласно формуле выше, т. е.

$$\begin{aligned}1\cdot(2n+1)\cdot(4n+2) &= 8n^2+8n+2 = \\ &= 8n^2+14n+6-(1+2n+1+4n+2).\end{aligned}$$

Критерии оценки.

1) Приведен пример с обоснованием, что он подходит — 7 баллов.