ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

**Муниципальный этап.**

**Ответы и решения**

**11 класс**

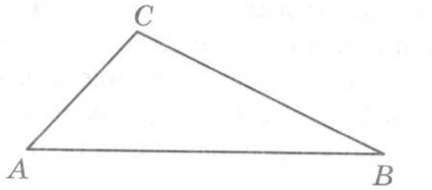
**11.1 Решение.** По условию $a^2+\sqrt{b}=a+b,$ откуда $a^2-a=b-\sqrt{b},$ т.е. $a(a-1)=\sqrt{b}(\sqrt{b}-1)$. Заметим, что $a-1\geq 0, \sqrt{b}-1\geq 0$. Значит, $a=\sqrt{b}$ (иначе каждый из сомножителей в одной из частей равенства был бы больше соответствующего сомножителя в другой части), т.е. $a^2=b,$ и числа $a$ и $b$ – одной четности, откуда и следует утверждение задачи.

**11.2 Ответ: $x^2-34x+64$, $x^2+30x$**

**Решение.** Пусть $x_1$ и $x_2$ - целые корни трехчлена $x^2+px+q$. Тогда $p=-(x_1+x_2), q=x_1\cdot x_2$, откуда $30=p+q=(x_1-1)(x_2-1)-1$, т.е. $(x_1-1)(x_2-1)=31$. Так как число 31 простое, оно может быть представлен в виде произведения двух целых чисел только следующим образом: $31=1\cdot 31=(-1)\cdot(-31)$. В первом случае получаем, что корнями трехчлена являются числа 2 и 32 (трехчлен $x^2-34x+64$, а во втором случае – числа 0 и -30 (трехчлен $x^2+30x$).

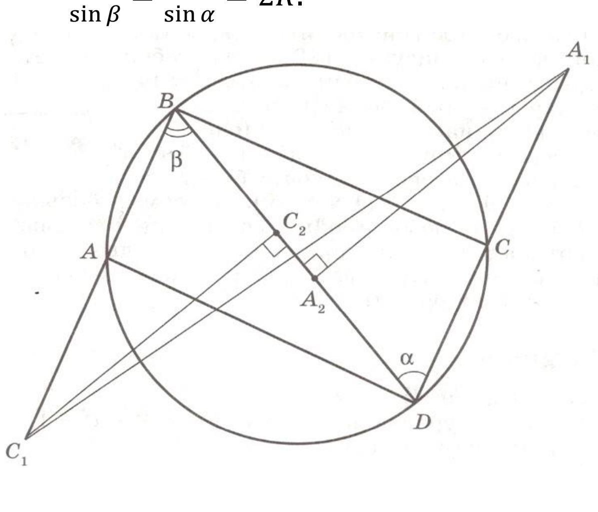
**11.3.Ответ: 3,5; 2,5 и 1,5**

**Решение.** Обозначим сторону треугольника *AB*, лежащую против угла *C* = 120°, через *x*.




Так как угол *C* – самый большой угол в треугольнике *ABC*, то сторона *AB* будет самая большая из сторон треугольника. Тогда длины двух других сторон треугольника равны $(x-1)$ и $(x-2)$. По теореме косинусов имеем: $x^2=(x-1)^2+(x-2)^2-2(x-1)(x-2)\cos 120°=3x^2-9x+7$. Уравнение $x^2=3x^2-9x+7$ равносильно уравнению $2x^2-9x+7=0,$ которое имеет корни $x_{1,2}=1; 3{,}5$. Так как $x=1$ не удовлетворяет условию задачи, то стороны треугольника равны 3,5; 2,5 и 1,5.

**11.4.Решение.** Доказываемое утверждение равносильно равенству перпендикуляров $A_1A_2$ и $C_1C_2$, проведенных к *BD*. Но $A_1A_2=A_1D\sin\alpha=AD\sin\alpha, C_1C_2=C_1B\sin\beta=CB\sin\beta$, и утверждение задачи следует из теоремы синусов: $AD\sin\alpha=CB\sin\beta \Leftrightarrow \frac{AD}{\sin\beta}=\frac{CB}{\sin\alpha}=2R$.



**11.5. Решение.** Среди записанных 2023 положительных чисел имеется наименьшее. Обозначим его через $b$. Пусть $a$ и $c$ – соседние к нему числа. Тогда $b = \frac{a+c}{2}$ или $b = \sqrt{ac}$, то есть $b - a = c - b$ или $b : a = c : b$. Но $b$ – наименьшее число, поэтому $b \leq a$ и $b \leq c$. Следовательно, в обоих случаях получаем: $a = b = c$, то есть «соседи» наименьшего числа также являются наименьшими. Переходя к рассмотрению числа $a$ (и $c$), аналогичными рассуждениями получаем, что «соседи» «соседей» также являются наименьшими, и так далее 2023 раза. В итоге получим, что все записанные числа равны друг другу.