11 класс

11.1. (О. Подлипский) У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим противное, и пусть $n>1$ – наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат $k\times k$, где $k\ge n>1$. Значит, его площадь не менее n^2. С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, …, $1\times n$, т.е. не больше $1+2+3+\ldots+n<n^2$. Противоречие.

Замечание. Расположив в квадрате $n\times n$ прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, …, $1\times n$ «лесенкой» можно увидеть без вычислений, что их суммарная площадь меньше площади всего квадрата.

Комментарий. Только ответ «не может» – 0 баллов.

Только идея рассмотреть самый длинный из использованных прямоугольников (длины n) – 1 балл.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что площадь, покрытая остальными использованными прямоугольниками, должна быть не меньше, чем $n(n-1)$ (или эквивалентное утверждение, например, что площадь всего квадрата должна быть не меньше, чем n^2), без дальнейшего содержательного продвижения – 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников не превосходит $n(n+1)/2$, без дальнейшего содержательного продвижения – 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и явно сказано, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников меньше n^2 – не менее 6 баллов.

Баллы, перечисленные выше, не суммируются друг с другом.

Если во в целом верном решении рассмотрен лишь случай квадрата со стороной n (а не больше) – снимается 1 балл.

11.2. (Н. Агаханов) Пусть $x_1<x_2<\ldots<x_{2024}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. При $i=1,2,\ldots,2024$ обозначим $p_i=(x_1-\frac{1}{x_1})(x_2-\frac{1}{x_2})\ldots(x_i-\frac{1}{x_i})$. Какое наибольшее количество натуральных чисел может содержаться среди чисел $p_1,p_2,\ldots,p_{2024}$?

Ответ. 2023.

Первое решение. Заметим, что число $p_1=x_1-\frac{1}{x_1}$ не может быть натуральным. Действительно, если $x_1=1$, то $p_1=0$, если же $x_1>1$, то p_1 – не целое, как разность целого и нецелого чисел. Поэтому натуральными могут быть не более 2023 чисел p_i.

Покажем, как получить 2023 натуральных числа. Если $x_1=2, x_2=3$, то $p_2=(x_1-\frac{1}{x_1})(x_2-\frac{1}{x_2})=(2-\frac{1}{2})(3-\frac{1}{3})=4$. При $n>2$ положим $x_{n+1}=p_n>x_n$. Тогда

$p_{n+1} = p_n(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}) = p_n^2 - 1$ также будет натуральным.

Второе решение. Приведем другой пример последовательности, дающий 2023 натуральных числа. Положим $x_1 = 2, x_2 = 3, \ldots, x_{2024} = 2025$. Тогда $x_k - \frac{1}{x_k} = k + 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k(k+2)}{k+1}$. Тогда $p_i = \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{i(i+2)}{i+1} = i!(i+2)/2$, что является натуральным числом при $i \geq 2$.

Замечание. Подходят любые 2024 последовательных натуральных числа, больших 1.

Комментарий. Ответ без обоснования – 0 баллов.

Только оценка – 1 балл.

Только пример – 6 баллов.

Приведён верный пример последовательности, но не обосновано, что она подходит – не более 5 баллов.

11.3. (П. Кожевников) По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря – чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?

Ответ. 50.

Решение. Нужно показать, что Аня всегда может добиться, чтобы разноцветных пар было не меньше 50, а Боря сможет помешать ей добиться, чтобы таких пар было больше 50.

Первый способ. *Стратегия Ани.* Первым ходом Аня красит в любой цвет любую точку, а дальше каждым ходом выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной (такая, очевидно, найдётся), и красит непокрашенную точку в цвет, отличный от цвета покрашенной. При этом образуется новая пара соседних разноцветных точек.

Стратегия Бори. Каждым ходом Боря выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной, и красит непокрашенную точку в цвет, совпадающий с цветом покрашенной. При этом образуется новая пара соседних одноцветных точек.

Обоснование правильности стратегий. Всего в круге имеется 100 пар соседних точек, и каждый игрок делает за игру по 50 ходов. Сделав свои ходы, Боря добьется того, что из этих 100 пар хотя бы 50 будут одноцветными, а Аня – что хотя бы 49 из них будут разноцветными. Однако заметим, что количество разноцветных пар всегда чётно. Действительно, после окончания игры пройдём полный круг, начиная с какой-то отмеченной точки (пусть для определённости с красной). Группы из идущих подряд красных и синих точек при этом будут чередоваться: К–С–К–С–...–К, и значит, встретим пар разноцветных соседей вида К–С столько же, сколько пар вида С–К. Поэтому если пар разноцветных соседних точек не меньше 49, то их хотя бы 50.

Первый способ. Разобьём все отмеченные точки на 50 пар соседей: P_1, P_2, ..., P_{50}.

Стратегия Бори. Если своим ходом Аня красит точку в паре P_i, то Боря ответным ходом красит вторую точку в паре P_i в тот же цвет. Ясно, что при такой игре Бори в конце игры каждая пара P_i будет покрашена в один цвет. Значит, из 100 пар соседних точек не менее 50 будут одноцветными. Поэтому разноцветных пар будет не больше, чем $100 - 50 = 50$.

Стратегия Ани. Аня будет добиваться того, чтобы в каждой паре P_i с нечётным номером i она покрасила одну из точек красным, а в каждой паре P_i с чётным номером i – синим. Если у Ани это получится, то покрашенные ею 50 точек разобьют окружность на 50 дуг с разноцветными концами. На каждой из этих дуг, очевидно, найдётся хотя бы одна пара разноцветных соседних отмеченных точек (в частности, если на дуге нет отмеченных Борей точек, такую пару образуют концы дуги).

Покажем, как Аня может реализовать этот план. Первым ходом она красит одну из точек в какой-то паре P_i соответствующим цветом. Далее, если Боря отвечает ходом в ту же пару, то Аня красит одну из точек в любой ещё не покрашенной паре, иначе она красит вторую точку в паре, в которой только что покрасил точку Боря. В результате после каждого хода Ани будет ровно одна пара P_j, в которой одна точка покрашена Аней, а другая не покрашена, а в каждой из остальных пар P_i будет либо две покрашенных точки, ровно одна из которых покрашена Аней, либо ни одной покрашенной точки. Значит, в конце игры Аней будет покрашено ровно по одной точке в каждой паре P_i, что ей и требовалось.

Комментарий. Только ответ – 0 баллов.

1) Предъявлена верная стратегия за Борю, гарантирующая, что число разноцветных пар не больше 50 – 2 балла.

1') Обосновано, что эта Борина стратегия работает – 1 балл.

2) Предъявлена верная стратегия за Аню, гарантирующая, что число разноцветных пар не меньше 50 – 2 балла.

2') Обосновано, что эта Анина стратегия работает – 2 балла (если при верной Аниной стратегии обосновано лишь, что она может обеспечить себе 49 пар, то считается, что обоснование отсутствует, и эти баллы не ставятся).

Баллы за указанные продвижения суммируются. Если предъявленная стратегия за одного из игроков не работает хотя бы в одном частном случае развития игры, такая стратегия признается не работающей и оценивается в 0 баллов.

11.4. (М. Евдокимов) На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках $A_1, A_2, \ldots, A_9$ соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$.

Решение. Покажем, что $S(A_2ZA_8) = S(A_3ZA_7)$. Требуемое в условии равенство получается вычитанием из обеих частей этого равенства площади серого треугольника с вершиной в точке Z, а также добавлением площадей двух серых треугольников, примыкающих к хордам A_2A_3 и A_7A_8 (рис. 13). Заметим, что $\angle A_2ZA_8 + \angle A_3ZA_7 = \frac{6}{10}\cdot 180^\circ + \frac{4}{10}\cdot 180^\circ = 180^\circ$, поэтому синусы этих углов равны. Поэтому достаточно доказать, что $ZA_2 \cdot ZA_8 = ZA_3 \cdot ZA_7$. Покажем, что оба произведения равны $XZ \cdot XY$. Для этого достаточно доказать следующее вспомогательное утверждение.

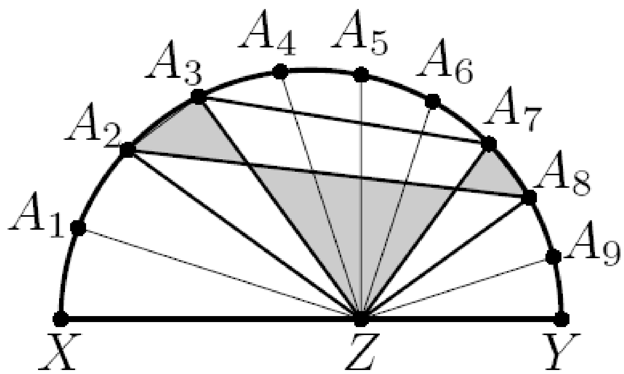

Рис. 13

Лемма. Пусть P и Q – две точки на полуокружности с диаметром XY, точка Z лежит на отрезке XY и $\angle XZP = \angle YZQ$. Тогда $ZP \cdot ZQ = ZX \cdot ZY$.

Доказательство леммы. Отметим точку R, симметричную Q относительно XY. Тогда четырехугольник $XPYR$ вписан в окружность с диаметром XY. Также в силу симметрии $ZQ = ZR$ и $\angle XZP = \angle QZY = \angle RZY$, то есть точки P, Z, R лежат на одной прямой. Значит, Z – точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $XPYR$, поэтому $XZ \cdot XY = PZ \cdot ZR = PZ \cdot ZQ$. Таким образом, лемма доказана, что завершает решение задачи.

Комментарий. (A1) Задача сведена к равенству $S(A_2ZA_8) = S(A_3ZA_7)$ – 1 балл.

(A2) Задача сведена к равенству произведений $ZA_2 \cdot ZA_8 = ZA_3 \cdot ZA_7$ – 2 балла.

(A3) В дополнении к A2. есть гипотеза, что оба произведения равны $ZX \cdot ZY$ – 3 балла.

(B) В работе сформулирована лемма из решения – 1 балл.

(C) В работе доказана лемма из решения – 3 балла.

Суммируются лишь продвижения из разных групп (A), (B), (C), продвижения за критерии одной группы не суммируются.

11.5. (М. Антипов) Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a+b)(2t-1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.

Решение. Обозначим $k = -a, \ell = a + b$, и перепишем уравнение в виде:

$$t^4 - kt^3 + (k+\ell)t^2 - 2\ell t + \ell = 0.$$

Заметим, что $k = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 > 0$ и $\ell = t_1t_2t_3t_4 > 0$.

Дальше, перепишем уравнение в виде

$$t^4 + \ell(t-1)^2 = kt^2(t-1),$$

откуда сразу следует, что все его корни строго больше 1.

Добавим к каждой части $2\sqrt{\ell}t^2(t-1)$, уравнение превратится в

$$(t^2 + u(t-1))^2 = v^2t^2(t-1),$$

где $u = \sqrt{\ell}, v = \sqrt{k + 2\sqrt{\ell}}$. Если обозначить $s = \sqrt{t-1}$, то получим однородное уравнение $t^2 - vst + us^2 = 0$, из которого следует, что $t / s = c_{1,2}$, где $c_1 = (v - \sqrt{v^2 - 4u}) / 2, c_2 = (v + \sqrt{v^2 - 4u}) / 2$.

Дальше, каждое из уравнений $t/s = c_i$ можно переписать в виде $t^2 - c_i t + c_i = 0$. Эти уравнения различны, и каждое из них имеет два различных положительных корня, так как исходное уравнение имеет 4 различных положительных корня. Из этого следует, что $4 < c_1 < c_2$.

Так как функция $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x}$ строго убывает при $x > 4$ (это несложно показать, например, взяв производную), то $c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_2} < c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1}$.

Теперь уже легко вычислить и упорядочить t_i:

$$t_1 = \frac{c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_2}}{2} < t_2 = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1}}{2} <$$

$$< t_3 = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_1}}{2} < t_4 = \frac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_2}}{2},$$

значит, $t_1 t_4 = c_2 > c_1 = t_2 t_3$.

Замечание. Из доказательства следует, что оценка точна, то есть разницу $t_1 t_4 - t_2 t_3$ можно сделать сколь угодно близко к 0.

Комментарий. Неравенство $t_1 < t_2$ не обосновано – снимаются 2 балла.

11.6. (О. Подлипский) У учителя есть 100 гирь массами 1 г, 2 г, …, 100 г. Он хочет раздать Пете и Васе по 30 гирь так, чтобы выполнялось следующее условие: никакие 11 Петиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Васиными гирями, а также никакие 11 Васиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Петиными гирями. Сможет ли учитель это сделать?

Ответ. Сможет.

Первое решение. Выберем 30 гирь с массами вида $3k+1$ г и дадим Пете, а Васе дадим 30 гирь с массами вида $3k+2$ г. Тогда масса любых 12 гирь, взятых у одного человека, будет делиться на 3, а масса любых 11 гирь, взятых у одного человека, не будет делиться на 3.

Второе решение. Выберем 30 гирь с массами 1, 2, 3, …, 30 г и дадим Пете, а Васе дадим 30 гирь с массами 71, 72, 73, …, 100 г. Тогда у Пети масса любых 11 или 12 гирь будет меньше $30 \cdot 12 = 360$ г. А масса любых 11 или 12 гирь у Васи будет больше $70 \cdot 11 = 770$ г.

Комментарий. Верный ответ без объяснения – 0 баллов.

Приведен пример верного разбиения на две группы по 30 гирь, но не объяснено, почему пример подходит (или объяснено только для одного из двух случаев) – 4 балла.

Приведен пример, который не работает хотя бы для одного выбора наборов гирь – 0 баллов.

11.7. (А. Терёшин) График G_1 квадратного трехчлена $y = px^2 + qx + r$ с вещественными коэффициентами пересекает график G_2 квадратного трехчлена $y = x^2$ в точках A и B. Касательные в точках A и B к графику G_2 пересекаются в точке C. Оказалось, что точка C лежит на графике G_1. Найдите все возможные значения p.

Ответ. 2.

Первое решение. Касательная в точке $A(x_a; x_a^2)$ к графику G_2 имеет уравнение

$$y = f'(x_a)(x - x_a) + x_a^2 = 2x_a(x - x_a) + x_a^2 = 2x_a x - x_a^2.$$

Аналогично уравнение касательной в точке $B(x_b; x_b^2)$ есть $y = 2x_b x - x_b^2$, откуда точка пересечения C имеет координаты $\left(\dfrac{x_a + x_b}{2}; x_a x_b\right)$. Три точки A, B и C принадлежат графику квадратного трёхчлена $px^2 + qx + r$, поэтому

$$\begin{cases} px_a^2 + qx_a + r = x_a^2, \\ px_b^2 + qx_b + r = x_b^2, \\ p \cdot \left(\dfrac{x_a + x_b}{2}\right)^2 + q\dfrac{x_a + x_b}{2} + r = x_a x_b. \end{cases}$$

Сложим первые два равенства и вычтем удвоенное третье, получим

$$p \cdot \left(x_a^2 + x_b^2 - \frac{x_a^2}{2} - x_a x_b - \frac{x_a^2}{2}\right) + q \cdot (x_a + x_b - x_a - x_b) + 2r - 2r =$$

$$= x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b, p \cdot \left(\frac{x_a^2}{2} - x_a x_b + \frac{x_a^2}{2}\right) = x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b, \frac{p(x_a - x_b)^2}{2} = (x_a - x_b)^2.$$

Так как $x_a \neq x_b$, получаем, что $p = 2$.

Второе решение. Вычтем из обоих трёхчленов линейную функцию, график которой проходит через точки A и B. Обозначим полученные трёхчлены соответственно $P(x)$ и $Q(x)$ (где у $P(x)$ старший коэффициент равен p, а у $Q(x)$ он равен 1). Пусть абсциссы точек A и B равны соответственно x_a и x_b. Тогда $P(x_a) = P(x_b) = Q(x_a) = Q(x_b) = 0$, и касательные в точках $(x_a, 0)$ и $(x_b, 0)$ к графику трёхчлена $Q(x)$ пересекаются на графике $P(x)$. В самом деле, вычитание линейной функции сохраняет условия касания прямой и параболы в точке с заданной абсциссой, а также пересечения двух прямых и параболы в одной точке.

Обозначим $(x_a + x_b)/2$ через x_m. Поскольку $Q(x_a) = Q(x_b) = 0$, график трёхчлена $Q(x)$ симметричен относительно прямой $x = x_m$, поэтому касательные к этому графику в точках $(x_a, 0)$ и $(x_b, 0)$ пересекаются на оси симметрии. Пусть также точка пересечения касательных имеет координаты (x_m, y_c), а вершина параболы-графика $Q(x)$ имеет координаты (x_m, y_d).

Поскольку старший коэффициент трёхчлена $Q(x)$ равен 1, имеет место равенство $0 - y_d = (x_b - x_m)^2$, или $y_d = -(x_a - x_b)^2 / 4$, поскольку график $Q(x)$ есть парабола $y = x^2$, перенесённая параллельно так, чтобы вершина попала в (x_m, y_d). По этой же причине угловые коэффициенты касательных в точках $(x_a, 0)$ и $(x_b, 0)$ есть $\pm(x_a - x_b)$; значит, $y_c = -(x_a - x_b)^2 / 2$. Таким образом, если перенести параболы-графики $P(x)$ и $Q(x)$ так, чтобы их вершины попали в $(0,0)$, то ординаты точек с абсциссой $x = x_m$ на этих параболах будут соответственно $-y_c$ и $-y_d = -y_c / 2$, из чего следует, что старший коэффициент у $P(x)$ в 2 раза больше, чем у $Q(x)$.

Замечание. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, можно получить, что

$$p=\frac{x_a^2}{(x_a-x_b)\left(x_a-\frac{x_a+x_b}{2}\right)}+$$

$$+\frac{x_b^2}{(x_b-x_a)\left(x_b-\frac{x_a+x_b}{2}\right)}+\frac{x_a x_b}{\left(\frac{x_a+x_b}{2}-x_a\right)\left(\frac{x_a+x_b}{2}-x_b\right)}=$$

$$=2\cdot\frac{x_a^2+x_b^2-2x_a x_b}{(x_a-x_b)^2}=2.$$

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Приведение примера трехчлена с $p=2$ не требуется.
Найдены координаты точки C – 1 балл.

11.8. (А. Кузнецов) В пространстве расположены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 с общей серединой M. Оказалось, что сфера ω, описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $MO=MD$.

Решение. Обозначим через O_1 центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, через P – центр сферы ω (рис. 14). При центральной симметрии относительно точки M треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Следовательно, точки O и O_1 симметричны относительно точки M, то есть M – середина отрезка OO_1. Также мы получаем, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Тогда на прямой, проходящей через точку P перпендикулярно этим плоскостям, лежат точки D и O_1, поэтому $\angle O_1DO=90^\circ$. Таким образом, DM – медиана в прямоугольном треугольнике O_1DO, значит, $MO=MD$, что и требовалось.

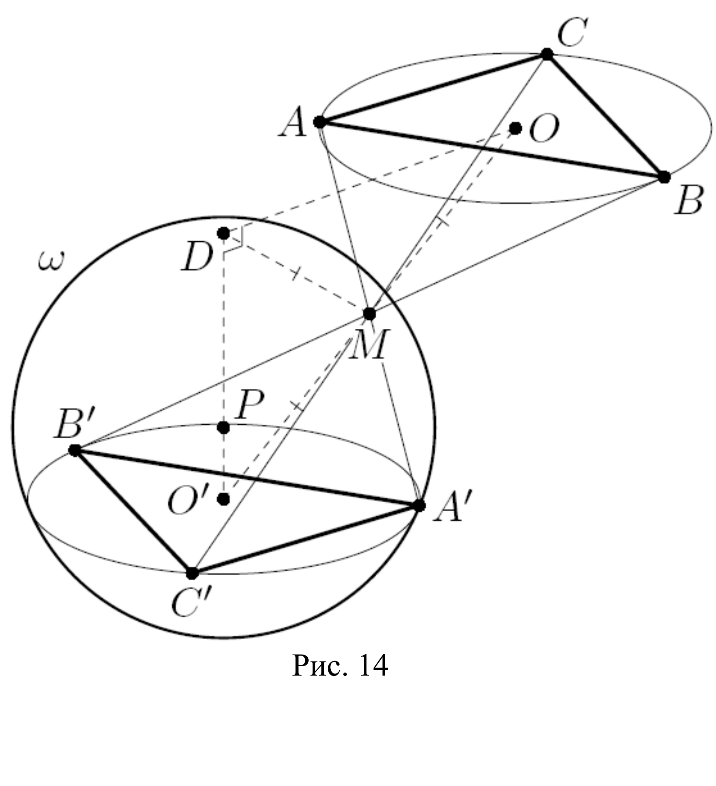

Рис. 14

Комментарий. 1) Отмечен центр O окружности, описанной около треугольника ABC и центр P сферы ω – 0 баллов.

2.1) Доказано, что точка M — середина отрезка OO_1 – 2 балла.

2.2) Задача сведена к доказательству того, что $\angle O_1DO = 90^\circ$ – 4 балла.

3.1) Доказано, что точки P, O_1, D лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскостям ABC и $A_1B_1C_1$ – 2 балла.

3.2) Доказано, что $\angle O_1DO = 90^\circ$ – 3 балла.

Суммируются баллы за критерии из разных групп. Внутри одной группы баллы не суммируются.

11.9. (И. Богданов) Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

Ответ. $2^{3\cdot 37^2} = 2^{4107}$.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной k, разобьём его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовём k*-треугольником*. В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

Лемма. Пусть A – отмеченная точка в k-треугольнике. Тогда существует единственный способ провести k прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно, A, покрыты этими прямыми. А именно, для каждой стороны k-треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой A (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую A) (рис. 15).

Доказательство леммы. Индукция по k. База при $k=1$ проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме A.

Для перехода рассмотрим сторону k-треугольника, на которой не лежит A. Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все $k+1$ отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых k. Значит, эта прямая проведена. Выкинув её и точки k-треугольника, лежащие на ней, получаем $(k-1)$-треугольник, в котором проведено $k-1$ прямых с теми же условиями. Осталось применить предположение индукции. Лемма доказана.

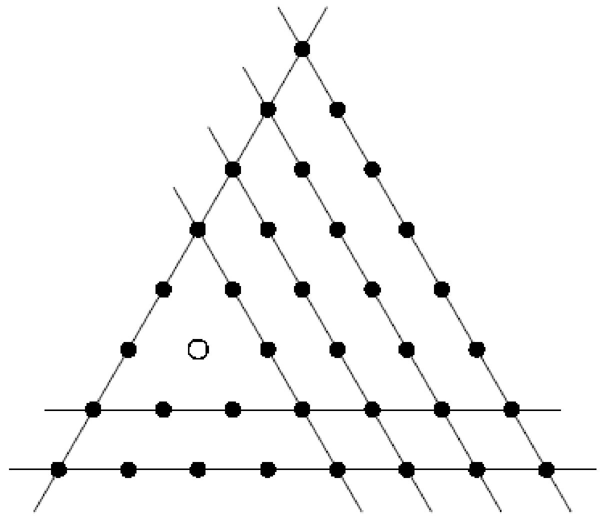

Рис. 15

Перейдём к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведём прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки 111-треугольника, кроме, возможно, его центра A. Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.

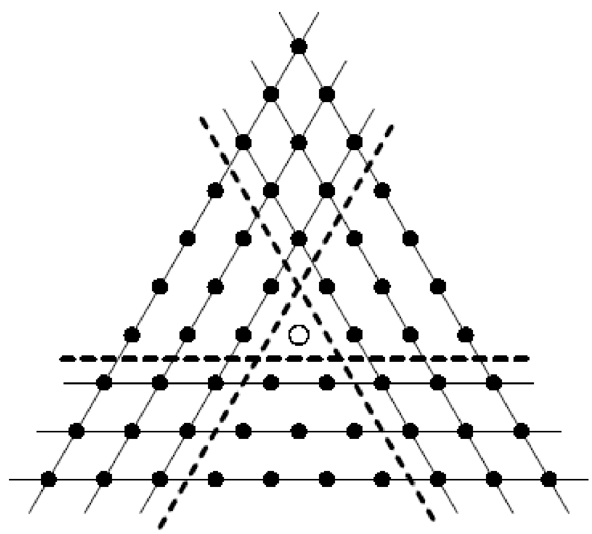

Рис. 16

Заметим, что наш 111-треугольник разбился на 6 областей: три «ромба» в углах, состоящих из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыты одной прямой (рис. 16). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через неё прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трёх «ромбов» всего 37^2 точек, получаем, что требуемых разбиений ровно $2^{3\cdot 37^2}$.

Замечание. Вариант доказательства леммы можно получить, показав сначала, что такое покрытие невозможно осуществить при помощи менее, чем k прямых.

Комментарий. Доказано только, что все точки, кроме одной, нельзя покрыть менее чем 111 прямыми – 1 балл.

Доказана только лемма, а подсчёт проведён неверно – 4 балла.

Лемма используется без доказательства — не более 3 баллов.

Во в целом верном подсчёте допущена ошибка на ± 1 (например, утверждается, что в ромбах по 36^2 или по 38^2 точек) – снимается 1 балл.

11.10. (М. Дидин) Дано натуральное число $n > 100$. Изначально на доске написано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через n минут не превышал $2^n + 50$ вне зависимости от действий Васи.

Решение. Приведем стратегию для Пети. Для этого представим 1 в виде суммы 2^n дробей с числителями 1, разобьем их на пары не равных, сложим числа в каждой паре. Затем 2^{n-1} полученных результатов вновь разобьем на пары не равных, и сложим числа в каждой паре. Будем продолжать так делать, пока не получится одно число. Поскольку сумма всех дробей равна 1, то после n шагов остается число 1.

Предположим, что описанный выше процесс возможен. В таком случае Петя разложит 1 в сумму двух чисел, которые складывались на n-м шаге. Вася выберет одно из слагаемых, которые представимо как сумму двух чисел, сложением которых данное число было получено на $n-1$-м шаге и т.д. В конечном итоге останется одна из исходных 2^n дробей.

Для реализации указанного процесса нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Есть 2 четвёрки чисел $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ и $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$. Тогда их можно сгруппировать по парам (a_i, b_j), чтобы числа в каждой паре были различны и суммы чисел в каждой паре были различны.

Доказательство леммы. Разберем несколько случаев:

1°. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Если $a_4 \neq b_4$, не умаляя общности $a_3 \geqslant b_3$ и можно сгруппировать $a_1 + b_2 > b_1 + a_3 > a_2 + b_3 > a_4 + b_4$. В случае $a_4 = b_4$ и н.у.о. $a_3 \geqslant b_3$ группируем $a_1 + b_2 > b_1 + a_3 > a_2 + b_4 > b_3 + a_4$.

2°. $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$ сводится к предыдущему, если мы перейдем к четверкам чисел $-a_i, -b_i$.

3°. Пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) разные, а также пары (a_3, b_3) и (a_4, b_4) разные. В таком случае покажем как сгруппировать числа первых двух пар между собой, с числами в третьей и четвертой паре поступим аналогично, явно получив две меньшие суммы чем в первой паре. Если $a_1 = b_1$ или $a_2 = b_2$ подходит $a_1 + b_2, a_2 + b_1$, в противном случае можно сгруппировать $a_1 + b_1$ и $a_2 + b_2$. Лемма доказана.

Покажем, что описанный в начале решения процесс возможен (получится на каждом шаге складывать различные числа), если исходные 2^n дробей удастся разбить на четверки так, чтобы в каждой четверке были попарно различные дроби. Действительно, в таком случае на очередном шаге мы разобьем четверки на пары и согласно лемме будем складывать числа из разных четверок. После каждого такого шага получившиеся суммы вновь будут разбиваться на четверки попарно различных чисел. Продолжая так первые $n-2$ шага, мы в итоге получим четверку различных чисел $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, на $n-1$ шаге сложим $x_1 + x_2$ и

$x_3 + x_4$, и на n-м шаге сложим уже эти два числа.

Таким образом, достаточно представить $1/4$ в виде суммы 2^{n-2} дробей вида $1/m$ четырьмя разными способами, каждый раз используя разные знаменатели, не превосходящие $2^n + 50$.

Первый способ – сумма 2^{n-2} одинаковых дробей $\frac{1}{2^n}$. Построим три других представления. Заметим, что среди чисел n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $n-5$ не более одной степени двойки и не более двух простых чисел (потому что простые числа, большие трех, могут давать только остатки 1 и 5 от деления на 6), уберем такие числа из рассмотрения. Любое оставшееся число можно представить в виде $n-k = pt$, где $p,t>1$ и t нечетно. Тогда $2^{n-k}+1$ кратно 2^p+1, обозначим частное от деления через q. Получаем, что $2^n + 2^k = 2^k(2^p+1)q$. Возьмем $2^{n-2} - 2^{k+p-2}$ дроби вида $\frac{1}{2^n+2^k}$ и 2^{k+p-2} дроби вида $\frac{1}{2^{k+p}\cdot q}$. Поскольку $k \leqslant 5$, то $2^{k+p}\cdot q < 2^n + 2^k < 2^n + 50$. Посчитаем сумму этих дробей:

$$\frac{2^{n-2}-2^{k+p-2}}{2^n+2^k} + \frac{2^{k+p-2}}{2^{k+p-2}\cdot q} = \frac{1}{4}\left(\frac{2^n - 2^{k+p}}{2^n+2^k} + \frac{2^k(2^p+1)}{2^n+2^k}\right) = \frac{1}{4}.$$

Проделаем так для трех различных значений k, остается убедиться, что полученные представления не содержат одинаковых дробей. Ясно, что с первым выбранным набором три новых не пересекаются, а также дроби вида $\frac{1}{2^n+2^k}$ могут быть лишь в одном наборе. Остается проверить, что дроби вида $\frac{1}{2^{k+p}q}$ различны. Предположим противное, $2^{k+p}q = 2^{k_1+p_1}q_1$. Поскольку q и q_1 нечетны, получаем, что $q = q_1$, и это число — общий делитель $2^n + 2^k$ и $2^n + 2^{k_1}$. Тогда $2^k - 2^{k_1}$ кратно q, поэтому $q < 32$. Однако, $p = \frac{n-k}{t} < n/3$, откуда $2^p + 1 < 2^{n/2}$ и $q > 2^{n/2} > 32$, противоречие.

Замечание. Неформально говоря, Петя с самого начала анализирует все возможные способы течения игры и для каждого варианта заранее продумывает ответ. Этому можно сопоставить двоичное дерево ранга n, в 2^n листьях которого содержатся все возможные исходные (дроби вида $\frac{1}{m}$ с суммой 1 и знаменателями, не превосходящими $2^n + 50$), а в каждой из остальных вершин записано число, равное сумме чисел в вершинах-потомках. Задача эквивалентна тому, что существует такое дерево, причем у каждой вершины (кроме листьев), в вершинах-потомках записаны разные числа.

Комментарий. (A0) Идея выделять 2^n возможных исходов и описание необходимых условий (в терминах процесса или двоичного дерева) – 1 балл.

(A1) Задача сведена к возможности построения процесса, используемого в решении – 2 балла.

(B0) Сформулирована лемма о разбиении чисел в двух четверках – 1 балл.

(B1) Доказана лемма о разбиении чисел в двух четверках – 2 балла.

(C0) Идея разбивать $\frac{1}{4}$ в виде суммы дробей четырьмя способами так, чтобы разные способы содержали разные дроби и в каждом способе было 2^{n-2} дроби – 1 балл. За предъявление тривиального способа (разбиение на равные дроби) баллы дополнительно не начисляются.

(C1) Построено разбиение единицы на дроби, которые разбиваются на четверки не равных – 3 балла.

Суммируются лишь продвижения из разных групп (A), (B), (C), продвижения за критерии одной группы не суммируются.