ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023-2024 УЧЕБНЫЙ ГОД

РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров, К.В.Трунов

Рецензент Р.Н.Гарифуллин

УФА - 2023

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
5. Во время проверки работ 30.11.23 и 01.12.23 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2023, ссылка

https://t.me/+kUieh-C3YJQ2MDZi

7 класс

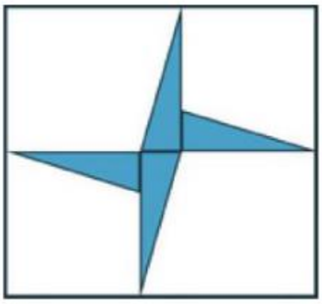
1. Найдите две последние цифры числа $(1!+2!+3!+\ldots+100!)^2$. Здесь $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, например, $6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$.

Решение. Так как для n>9 имеем, что n! делится на 100 (в этом легко убедиться, вычислив первые 10 таких величин), получаем, что число $1!+2!+3!+\ldots100!$ имеет вид
$100k+1+2+6+24+20+20+40+20+80=100(k+2)+13=100m+13$.
Тогда $(1!+2!+3!+\ldots100!)^2=(100m+13)(100m+13)=$
$=10000m^2+26\cdot100m+169$.

Ответ: 69.

Критерии. Только ответ - 1 балл. Замечено и доказано, что число $1!+2!+3!+\ldots100!$ оканчивается на 13 - 3 балла. Рассуждения о последних цифрах квадрата этой величины могут вестись без применения переменной.

2. Стороны прямоугольника равны 28 см и 30 см. Внутри него расположены 4 одинаковых прямоугольных треугольника, образующие закрашенную фигуру. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. Пусть стороны закрашенного треугольника, образующие прямой угол, равны x и y, x>y. Тогда 30=2x+y, 28=2x. Откуда x=14, y=2. Искомая площадь равна 2·14·2=56.

Ответ: 56.

Критерии. Замечено, что одна из сторон треугольника равна 14 - 1 балл. Верно найдены обе стороны треугольника, но площадь не подсчитана – 4 балла. При подсчете площади потерян множитель 2 или ½ , все остальное верно – 5 баллов.

3. Пусть для натуральных чисел x и y операция $x\&y$ означает остаток от деления x на y. Например, 17&6=5, 6&17=6. Найдите все натуральные решения уравнения $x\&7 + 7\&x = 12$, удовлетворяющие неравенству $2016 < x < 2044$.

Решение. Так как число x>7, то 7&x=7. Тогда x&7+7 =12, x&7=5, откуда x=7k+5. Числа такого вида в заданном промежутке: 2023, 2030, 2037.

Вид числа x может не показываться алгебраической формулой, а записыватся словами «имеет остаток 5 при делении на 7».

Ответ: 2023, 2030, 2037.

Критерии. Только ответ - 1 балл. Частичный ответ - 0 баллов. Замечание, что 7&x=7 - 1 балл (суммируется с предыдущим). Дополнительно сказано о виде числа x – плюс 1 балл.

4. Сравните числа A и B, где

$$A=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2023}\right),\quad B=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots\frac{2023}{2022}\right).$$

Решение. Рассмотрим число $A=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2023}{2022}\cdot\frac{2024}{2023}=1012.$

Рассмотрим число B. Заметим, что в скобках записано 2022 слагаемых, каждое из которых больше единицы. Тогда их сумма больше 2022. Покажем, что сумма в скобках больше 2024. Действительно,

$$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2},\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3},\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4},\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5},\frac{7}{6}=1+\frac{1}{6},$$

$$\frac{8}{7}=1+\frac{1}{7},\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8},\frac{10}{9}=1+\frac{1}{8},\frac{11}{10}=1+\frac{1}{10},\frac{12}{11}=1+\frac{1}{11},$$

$$1+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}+\frac{8}{7}+\frac{9}{8}+\frac{10}{9}+\frac{11}{10}+\frac{12}{11}=$$

$$=12+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right)==13+0.25+$$
$0.2+0.125++0.1\ +\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}=13.675+\frac{239}{693}$>14, откуда B > $\frac{1}{2}$·2024=1012.

Критерии. Преобразовано число A - 1 балл. Получена оценка B > 1011 - 1 балл (суммируются).

5. На доске написано число 2. Петя и Ваня играют в игру. За один ход следует прибавить к числу на доске другое натуральное число, меньшее написанного, стереть старое число и написать вместо него новое. Выигрывает тот, кто первым получит число 2023. Кто победит при правильной игре, если первым ходит Петя?

Решение. Пусть после хода Пети на доске написано число N. Тогда Ваня может получить одно из чисел {N+1,...2N-1}. Тогда Петя всегда может добиться числа 2N или 2N+1 на доске. Это означает, что после первого хода Петя напишет 3, далее 7, 15, 31, 63, 126, 252, 505, 1011, 2023.

Ответ: Победит Петя.

Критерии. Приведена выигрышная стратегия, но не обоснована - 2 балла.

6. Из одной точки круговой трассы длиной 2024 метра в противоположных направлениях с постоянными скоростями стартуют заяц и черепаха. Первый раз они встречаются через 10 минут на расстоянии 79 метров от старта. Найдите, через какое время они впервые встретятся на расстоянии 60 метров от старта.

Решение. Пусть m- число встреч зайца и черепахи, откуда $79m+60=2024k$ либо $79m-60=2024n$, где m, n,k- целые числа. Заметим, что если разделить 2024 на 79, то целая часть частного равна 25. Возьмем m=26, тогда $79\cdot 26-2024=30$. Значит, через 520 минут расстояние от старта будет равно 60 м. В случае второго соотношения, если n=1 или 2, целых решений нет, а значит оно не даст лучшее время.

Ответ: **520** минут.

Критерии. Только ответ - 1 балл. Рассмотрена только одна из двух ситуаций - 3 балла.