Условия и решения задач

(районная математическая олимпиада 2023 г.)

7 класс

1. Есть две свечи одинаковой длины, которые горят равномерно. Первая свеча сгорает за 8 минут, вторая - за 10 минут. Через сколько минут высота первой свечи будет вдвое меньше второй, если их зажгли одновременно?

Решение. Пусть высота свечей *h* см. Через *t* минут высота свечей будет $h(1-\frac{t}{8})$ см и $h(1-\frac{t}{10})$ см. По условию задачи получаем уравнение:

$$2\,h(1-\frac{t}{8}) = h(1-\frac{t}{10}),$$

Единственное решение которого $t = \frac{20}{3}$ мин.

Ответ: $\frac{20}{3}$ мин.

2. Два различных натуральных числа записаны при помощи 4 четверок, 3 троек, 2 двоек и одной единицы каждое. Может ли одно из них делиться на другое нацело? (Ответ обоснуйте, в случае «да» достаточно привести пример).

Решение. Если одно из этих чисел делится на другое, то частное может быть равно только 2 или 3. Действительно, числа различны, значит, частное не равно 1. С другой стороны, самым большим из описанных чисел может быть 4444333221, а самым маленьким 1223334444, но даже их отношение меньше 4. Покажем, что отношение не может быть равно так- же 2 и 3. Если меньшее число умножить на 2, то в большем получаются цифры 6 и 8, что невозможно. Если меньшее число умножить на 3, то в большем обязательно будет цифра 6 или 7 (при переходе 1 в другой разряд), это тоже не соответствует условию. Таким образом, ответ: нет

Ответ: Нет.

3. Четно или нечетно значение произведения $(3x+10y+5z-3)(5x-30y-z+10)$, где x, y и z – целые числа?

Решение. Или рассматриваем комбинации чет/нечет чисел x, y и z (всего 23 вариантов) или еще проще рассмотрим сумму: $(3x+10y+5z-3)+(5x-30yz+10) = 8x-20y+4z+7$ – нечетное число. Значит, если сумма нечетная, то скобки будут разной четности. Значит, произведение будет четным.

Ответ: четным.

4. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* углы при вершинах *A, B, C* равны. На стороне *AB* отмечена точка *E*. Докажите, что если *AD*=*CD*=*BE*, то *CE* – биссектриса угла *BCD*.

Решение. (Предлагаем сделать рисунок самостоятельно). Треугольник *ADC* – равнобедренный. Следовательно, *DAC*= *DCA*. Поскольку *A*= *C*, то *BAC*= *BCA*. Значит, *AB*=*BC*. Треугольники *BDA* и *BDC* равны по третьему признаку. Следовательно, *BD* – биссектриса угла *ABC*. Треугольники *BCD* и CBE равны по первому признаку. Тогда .

$$\angle BCE = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BCD.$$

Следовательно, *CE* – биссектриса угла *BCD*. Что и требовалось доказать.

5. Докажите, что при любом n или в записи числа $n^3 + n$, или в записи числа $n^3 - n$ последняя цифра равна нулю.

Доказательство. Рассмотрим последние цифры чисел $n^3 + n$ и $n^3 - n$ в зависимости от последней цифры числа n. Результаты удобно расположить в виде следующей таблицы:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
$n^3 + n$	$\underline{0}$	2	$\underline{0}$	$\underline{0}$	8	$\underline{0}$	2	$\underline{0}$	$\underline{0}$	8
$n^3 - n$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	6	4	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	4	4	$\underline{0}$

Из полученной таблицы непосредственно видно, что, по крайней мере, одно из чисел $n^3 + n$ или $n^3 - n$ оканчивается нулем, что и требовалось доказать.