Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2023-2024 учебный год
7 класс
Максимальный балл – 35

1. Петя увеличил числитель некоторой дроби на 2048 и её значение увеличилось на 2. Чему может быть равен знаменатель этой дроби?
Ответ. 1024.
Решение. Рассмотрим равенство из условия задачи

$$\frac{a+2048}{b} = \frac{a}{b} + 2,$$

сокращая на $\frac{a}{b}$, получим, что $\frac{2024}{b} = 2$, следовательно, $b = 1024$.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Приведён только ответ и проверено, что он подходит – 5 баллов. Только ответ без объяснений – 0 баллов.

2. Вася начал выписывать в одну строку числа. Сначала он записал 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, затем 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, затем 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2 и так далее. После выписанных 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 он продолжает писать и начинает снова с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и так далее. Какая цифра будет на 2023 месте?
Ответ. 2.
Решение. Заметим, что Вася каждый раз выписывает 11 цифр (при этом 10 чисел). Найдём количество перидов $2023/11 = 183\frac{10}{11}$. Таким образом, Вася выписал набор из 10 чисел (11 цифр) полных 183 раза. Каждый одинадцатый набор повторяется, следовательно, набор в котором находится 2023 цифра является остатком деления 183/10 и плюс 1, то есть четвёртый, а именно 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3. При вычислении $2023/11 = 183\frac{10}{11}$ мы получили 183 целых набора и $\frac{10}{11}$, то есть в 183-м наборе десятая из одиннадцати цифра (не число), а именно 2.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Правильно найдена десятка чисел, но само число не правильно найдено – 3 балла. Правильные рассуждения о поиске периодичности, но при неправильной подсчёте – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.

3. У Миши есть набор из пяти карточек с цифрами $1, 2, 3, 4, 5$ (всех карточек по одной) и он составляет из них пятизначные числа. Число назовём *холмистым*, если у каждой не крайней цифры либо оба соседа больше неё, либо оба меньше (при этом может быть, что у одних оба выше, а у других оба ниже). Сколько холмистых чисел Миша может составить?
Ответ. 32.
Решение. Найдём количество чисел типа $* < * > * < * > *$. Число 5 больше любого своего соседа, поэтому оно может быть только на втором или четвёртом месте. Эти случаи симметричны, поэтому достаточно найти число чисел типа $* < 5 > * < * > *$, а потом удвоить число способов. Число 4 больше всех остальныз, поэтому числа типа $* < 5 > * < * > *$ разделяются только на два типа: $4 < 5 > * < * > *$ и $* < 5 > * < 4 > *$.

В первом случае число 3 может быть только на четвёртом месте, а остальные два числа распределяются по местам как угодно. Это даёт два холмистых числа: 45231 и 45321.

Во втором случае числа $1, 2, 3$ могут стоять как угодно на трёх оставшихся местах, это шесть холмистых чисел.

Полученные 8 чисел остаётся умножить два раза на 2: первый раз в силу симметричности постановки числа 5, второй раз в силу направления холмистости $* > * < * > * < *$.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Задача разбивается на 2 симметричных случая, разбор каждого случая, без второго – 3 балла. В задаче не требуется выписывать все холмистые числа, поэтому правильное решение без приведения всех чисел – 7 баллов. Можно заметить, что задача решается полным перебором 120 вариантов, как и всегда ошибка в полном переборе – 0 баллов. Выписаны все 32 числа и нет объяснений – 2 балла.

4. На острове честных гномов появился самозванец. Сейчас всего на острове 63 гнома, они весят одинаково и всегда говорят правду, кроме самозванца, который весит меньше и всегда лжет, и не хочет быть пойманным. Слепой волшебник с помощью магии переносит на чаши весов по 31 гному, после чего гном, не участвовавший во взвешивании, сообщает волшебнику, которая из чаш перевесила (или что весы в равновесии). Сможет ли волшебник с помощью таких операций найти самозванца? (Волшебник умеем нумеровать гномов и отличать их, а также переставлять их на чаши по своему усмотрению, но только по 31 штуке.)
Ответ. Да, сможет.
Решение. Найдём настоящего гнома. Заметим, что ответ «равновесие» невозможен, так как если гном-самозванец находится на весах, то равновесие отсутствует, а если он не на весах, то равновесие имеет место, но при этом он должен солгать. Тогда по результату первого взвешивания можно определить 31 настоящего гнома. Действительно, вне зависимости от того, какой гном не участвует во взвешивании, на чаше, про которую сказано, что она более тяжёлая, находятся только настоящие гномы.

После этого выберем настоящего гнома, который не будет участвовать во взвешиваниях, и тогда с помощью нескольких взвешиваний мы без проблем найдём самозванца. Например, пронумеруем всех гномов по отдельности на левой и на правой чашах и взвесим их. Очевидно, самозванец находится на более легкой чаше (по условию он легче). Далее поменяем местами первого гнома на левой чаше и первого на правой чаше и так далее (после каждого обмена производим взвешивание). В какой-то момент мы перестаним самозванца на противоположную чашу, что тут же скажется на результате взвешивания.
Замечание. Можно ещё рассуждать так: проведём все возможные взвешивания. Самозванец – тот, кто во всех взвешиваниях (где он учавствовал) оказывался на лёгкой чаше.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если найдены настоящие гномы и нет дальнейших продвижений – 1 балл. Замечено, что ответ «равновесие» невозожен – 1 балл. В рассуждение из замечания жюри не верит, нужно чтобы в работе было обосновано почему это так. Только ответ – 0 баллов.

5. Катя записывает все целые положительные числа n, которые дают остаток 7 при делении 2023 на n. Какова сумма чисел, которые она запишет?
Ответ. 6529.
Решение. Число 2023 при делении на n даёт остаток 7, по определению, это означает, что 2023-7 делится на n и $n > 7$. Поэтому нам нужно найти все делители числа 2016. Заметим, что $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$. Заметим, что если раскрыть все скобки в выражении

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)(1 + 3 + 3^2)(1 + 7),$$

то мы получим все делители числа 2016. Тогда сумма, которую запишет Катя равна

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+7)-1-2-3-4-6-7 = (2^6-1)\cdot 13\cdot 8-23 = 6529.$$

Вычитание производится, так как наше число $n > 7$.
Критериий. Полное решение – 7 баллов. При финальном подсчёте не вычтено 28 – 6 баллов. Указано, что нужно искать делители числа 2016 без дальшейних продвижений – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.