Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2023 – 2024 учебный год
Математика
7 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений.

Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

7.1. Приведите пример такого выражения, состоящего из единиц, скобок, знаков «+» и «×», что

− его значение равно 11;

− если в этом выражении заменить все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», то всё равно получится 11.

Решение. Приведем один из возможных примеров:

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 x 1 x 1 x 1 x 1 x 1 x 1 x 1 x 1 x 1 x 1

Комментарий. Любой верный пример − 7 баллов.
Идейно верный пример, не работающий из-за технической ошибки (что-то в духе лишней или недостающей единицы в примере выше) − 2 балла.
Любой неверный пример − 0 баллов.

7.2. Петя нарисовал 5 прямых (рис.1) и заметил, что они пересекаются ровно в 6 точках. Нарисуйте 8 прямых так, чтобы они пересекались ровно в 11 точках.

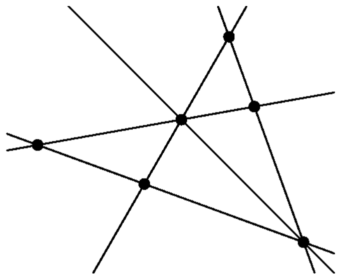
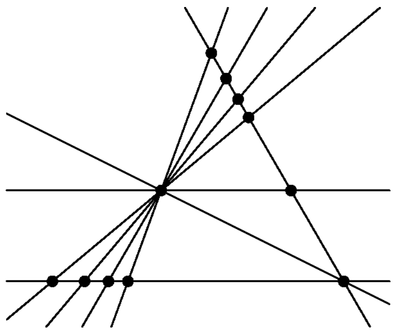


Рис.1

Решение. Ниже приведен один из возможных примеров (две из прямых параллельны).



Комментарий. Любой верный пример − 7 баллов.
Указание. В примере не должно быть дополнительных точек пересечения прямых за пределами «видимой части».

Если все пары прямых, пересекающиеся вне видимой части картинки, можно сделать параллельными, получив тем самым правильный пример − 2 балла.

Неверный пример, который нельзя легко модифицировать в верный пример − 0 баллов.

7.3. Петя говорит, что если a^5 делится на b^2, где a и b — натуральные числа, то a^2 делится на b. Докажите, что он неправ, приведя опровергающий пример.
Решение. Простейший контрпример: $a = 4$, $b = 32$.
Комментарий. Приведён верный пример − 7 б.

7.4. В понедельник 5 человек из класса получили пятёрки по математике, во вторник пятёрки получили 8 человек, в среду − 6 человек, в четверг − 4 человека, в пятницу − 9 человек. Никто из учеников не получал пятёрки два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников могло учиться в классе?

Ответ: 14.

Решение. Рассмотрим пары подряд идущих дней.

За понедельник и вторник пятёрки получили 5 + 8 = 13 человек.

За вторник и среду пятёрки получили 8 + 6 = 14 человек.

За среду и четверг пятёрки получили 6 + 4 = 10 человек.

За четверг и пятницу пятёрки получили 4 + 9 = 13 человек.

Так как никто не мог получать пятёрку два дня подряд, количество учеников в классе не меньше, чем максимальное из полученных чисел. То есть в классе хотя бы 14 учеников.

Приведём пример, как четырнадцать учеников могли получать пятёрки. Пронумеруем учеников от 1 до 14.

В понедельник пятёрки получили ученики 10,11,12,13 и 14.

Во вторник пятёрки получили ученики 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

В среду пятёрки получили ученики 9,10,11,12,13 и 14.

В четверг пятёрки получили ученики 1, 2, 3 и 4.

В пятницу пятёрки получили ученики 6, 7, 8, 9,10,11,12,13 и 14.

Комментарий.

Приведен верный пример − 4 балла,

Выполнена оценка − 3 балла.

7.5. В музее 16 залов, расположенных, как показано на рисунке.

		Б	
	А		

В половине из них выставлены картины, а в половине - скульптуры. Из любого зала можно попасть в любой соседний с ним (имеющий общую стену). При любом осмотре музея залы чередуются: зал с картинами - зал со скульптурами - зал с картинами и т.д. Осмотр начинается в зале А, в котором висят картины, а заканчивается в зале Б.

а) Обозначьте крестиками все залы, в которых висят картины.

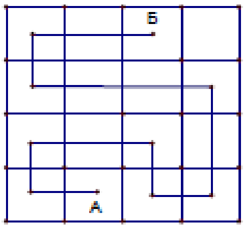
б) Турист хочет осмотреть как можно больше залов (пройти от зала А к залу Б), но при этом в каждом зале побывать не больше одного раза. Какое наибольшее количество залов он сможет посмотреть? Нарисуйте какой-нибудь его маршрут наибольшей длины и докажите, что большее количество залов он посмотреть не мог.

а) **Решение.** Смотри рисунок.

X		Б X	
	X		X
X		X	
	X А		X

б) **Ответ.** 15.

Решение. Один из возможных маршрутов показан на рисунке.



Докажем, что если турист хочет побывать в каждом зале не больше одного раза, он не сможет посмотреть больше, чем 15 залов. Заметим, что маршрут начинается в зале с картинами (А) и заканчивается в зале с картинами (Б). Значит, число залов с картинами, которые прошел турист на один больше числа залов со скульптурами. Так как залов с картинами, которые мог пройти турист не больше 8, то залов со скульптурами – не больше 7. Итак, маршрут не может проходить больше чем через 15 залов.

Комментарий. а) Верное решение - 1 балл.

б) Приведен пример верного маршрута (конечно, не обязательно такого, как в решении выше) и доказано, что маршрут не может быть длиннее - 6 баллов.

Приведен пример верного маршрута, но не доказано, что маршрут не может быть длиннее - 2 баллов.

Интернет-ресурсы:
http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru, https://siriusolymp.ru/mathematics.