

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

7 класс

2023-2024 учебный год

7.1. Можно ли разложить девять гирек массой от 1 до 9 грамм в три одинаковых коробки так, чтобы в одной коробке было две гирьки, в другой – три, а в третьей – четыре, и при этом масса коробок с гирями была одинаковой?

Ответ: Да, можно.

Решение. Сумма масс девяти данных гирек равна $1+2+3+\dots+9=45$ (г), следовательно, масса гирек в каждой коробке должна быть равна 15 граммам. Все возможные варианты размещения гирек по коробкам показаны в таблице.

7.2. В следующих многозначных числах цифры заменены буквами (одинаковые цифры – одинаковыми буквами, а разные – разными). Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9?

Ответ: Не может.

Решение. Сразу ясно, что буква О означает цифру 0 (нуль), иначе не будет делимости на 90. Всего использовано 10 различных букв, значит, и зашифрованы все 10 цифр. Так как букве О соответствует цифра 0, то сумма всех цифр, соответствующих остальным девяти буквам, равна 45, т.е. кратна 9. Сумма Д+Е+В+Я+Н+С+Т делится на 9, а также Д+Е+В+Я+Т+К+А делится на 9. Значит, Н+С и К+А делятся на 9. Предположим, что СОТКА делится на 9, тогда С+Т+К+А делится на 9. Но раз К+А делится на 9, то и С+Т делится на 9. Имеем: Н+С и Т+С оба делятся на 9. Значит, Н и Т дают одинаковые остатки при делении на 9. Но из цифр это могут быть только 0 и 9, а 0 занят буквой О. Получили противоречие, значит, сделали неправильное предположение и СОТКА не делится на 9.

7.3. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь восемь окружностей? 5. В одном городе 20% семей, имеющих кошек, имеет также собак, 25% семей, имеющих собак, имеет также и кошек, а 20% всех семей не имеют ни кошек, ни собак. Какой процент семей в этом городе имеет и кошек, и собак?

Ответ: 10% семей.

Решение: Пусть x семей имеет и кошек, и собак. По условию 20% (или $1/5$) всех семей, имеющих кошек, имеет и собак. Значит, кошек имеет $5x$ семей. Поскольку 25% (или $1/4$) семей, имеющих собак, имеет и кошек, то собак имеет $4x$ семей. Итак, x семей имеет и кошек, и собак, $4x$ семей – только кошек, $3x$ семей – только собак. Всего получается $x+4x+3x = 8x$ семей, имеющих животных. По условию они составляют 80% всех семей в этом городе. Значит, всего в городе $8x : 80 \cdot 100 = 10x$ семей, среди них x семей имеет и кошек, и собак. Они составляют $1/10$, или 10%.

7.4. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге – лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги сказали: «Мой сосед по шеренге – лжец».) Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2023 воина?

Ответ. 1012.

Решение: Заметим, что два воина, стоящие рядом, не могли оказаться рыцарями. Действительно, если бы они оба были рыцарями, то они оба сказали бы неправду. Выберем воина, стоящего слева, и разобьем ряд из оставшихся 2022 воинов на 1011 группы по два рядом стоящих воина. В каждой такой группе не более одного рыцаря, т.е. среди рассматриваемых 2022 воинов не более 1011 рыцарей, т.е. всего в шеренге не более $1011 + 1 = 1012$ рыцарей. Рассмотрим шеренгу РЛРЛР...РЛРЛР. В такой шеренге стоит ровно 1012 рыцаря.

7.5. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра вдвое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные углы зала, они в два слоя накрыли 4 м^2 , а когда их положили в соседние углы, то 14 м^2 . Каковы размеры зала?

Ответ. $19 \times 19 \text{ м}^2$.

Решение: В первом случае пересечением ковров является квадрат площади 4 м^2 (рис. слева), значит, длина стороны этого квадрата равна 2 м. Во втором случае, пересечение – прямоугольник, одна сторона которого также равна 2 м (рис. справа). Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна $14 : 2 = 7$ (м), а это и есть длина стороны меньшего ковра. Значит, сторона большего ковра имеет длину 14 м. Так как стороны ковров накладываются друг на друга на 2 м, то длина стороны зала равна $7 + 14 - 2 = 19$ (м).

