

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2023-2024 учебный год

7 класс

1. Можно ли по кругу расставить числа от 1 до 8 так, чтобы сумма любых двух соседних чисел в круге была простым числом? (Натуральное число называется простым, если у него ровно 2 различных делителя)

Ответ: да.

Решение. Например: 1, 6, 7, 4, 3, 8, 5, 2.

2. Друзья Володя и Гриша договорились встретиться и пообедать в кафе “Придорожное” на середине пути между А и В. Поэтому утром они одновременно и с одинаковыми скоростями вышли навстречу друг другу, Володя из А, Гриша из В. Через некоторое время Гриша остановился и 5 минут подумал над тем, так ли ему хочется встречаться с Володей, решил, что нет, и пошел назад в В. Но через 10 минут он снова остановился, 5 минут подумал над тем, что нехорошо отменять назначенную встречу, повернул обратно и пошел по направлению к кафе. Володя все это время ни в чем не сомневался и просто шел вперед. В результате друзья встретились и пообедали, но в кафе “Заливное” в 1 км от “Придорожного”. Найдите скорости каждого.

Ответ: 4 км/ч

Решение: Пусть скорость каждого x км/ч, а встреча планировалась через t часов. Володя прошел на 1 км больше, чем планировалось, значит встреча произошла на $1/x$ часов позже, чем планировалось, в $t+1/x$. В то же время Гриша прошел на 1 км меньше, чем планировалось (для этого ему потребовалось $t-1/x$ часов) + 10 минут стоял + 20 минут ходил туда-сюда. Значит $t+1/x = t - 1/x + 0.5$, откуда $x = 4$.

3. Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 2 прямоугольника с периметром 70 см каждый, также можно разрезать на 3 прямоугольника периметром 60 см каждый, и также можно разрезать 4 прямоугольника с периметром 50 см каждый? (Если существует, приведите пример такого прямоугольника и покажите, как его надо разрезать в каждом случае. Если не существует, объясните почему.)

Ответ: существует.

Решение. Например, прямоугольник 20×30 . Его можно разрезать на два прямоугольника 15×20 , на три прямоугольника 10×20 , на четыре прямоугольника 10×15 .

4. В стране логики живут рыцари, лжецы и жулики. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут, а жулики врут рыцарям и говорят правду остальным. 20 жителей страны встали по кругу. Каждый спросил соседа слева: “Ты рыцарь?”. Все ответили на вопрос, и вышло x ответов “нет”. После этого каждый опять спросил соседа слева: “Ты лжец?”. Все снова ответили на вопрос, и на этот раз вышло x ответов “да” (ответы на прошлый вопрос не считаем). Какое максимальное значение может принимать x ?

Ответ: 6.

Решение. Оценка. Ответ “нет” на первый вопрос звучит, только когда жулик отвечает жулику или лжецу. Ответ “да” на второй вопрос, только когда жулик отвечает рыцарю. Таким образом, жуликов $2x$ (x жуликов, справа от которых стоит не рыцарь и x жуликов, справа от которых стоит рыцарь). А так как есть x жуликов, справа от которых стоит рыцарь, то рыцарей хотя бы x . То есть людей хотя бы $3x$. Отсюда x не больше 6.

Пример на 6: РРРЖЖРЖЖР...РЖЖ.

5. В стране несколько городов. Между некоторыми городами есть дорога. Министр транспорта заметил, что для любого числа от 0 до 6 найдутся такие 4 города, что количество дорог между ними равно этому числу. Какое наименьшее количество городов может быть в этой стране?

Ответ: 7 городов.

Решение. Оценка. Есть 4 города, попарно соединенные между собой дорогами.

Одновременно два из этих городов не могут входить в группу из 4-х городов, между которыми нет дорог. Значит есть еще хотя бы 3 города.

Пример. Города 1, 2, 3, 4 соединены между собой каждый с каждым, город 5 соединен с городами 1 и 2, города 6 и 7 соединены с городом 3.