

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2023-2024 уч.год
 7 класс
 Решения и ответы

1. Одну сторону квадрата увеличили в 14 раз, а вторую уменьшили в 2 раза. У получившегося прямоугольника площадь оказалась равной 2023. Чему равна сторона квадрата?

Решение. Площадь прямоугольника увеличилась в 7 раз по сравнению с площадью квадрата. Тогда площадь квадрата равна $2023 : 7 = 289 = 17^2$. Отсюда получаем, что сторона квадрата равна 17.

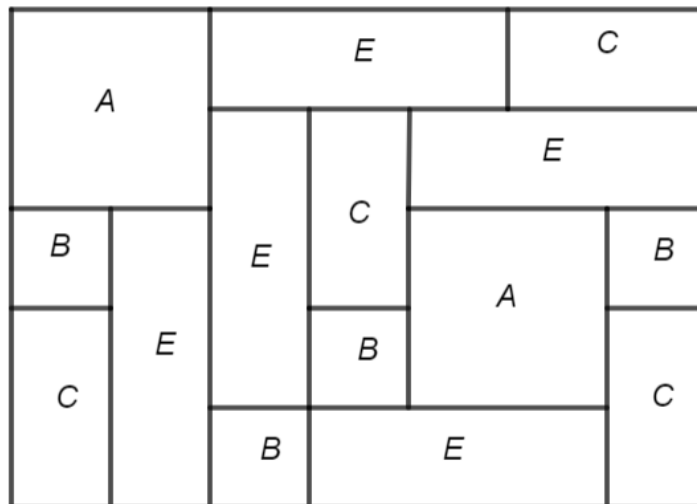
Ответ. 17

2. Четыре гимнастки – Алёна, Вера, Оля и Юля – рассказали о результатах соревнований. Алёна сказала: «Я не стала ни первой, ни последней». Вера сказала: «Я не заняла последнее место». Оля сказала: «Я – первая». Юля сказала: «Я на последнем месте». Три из этих ответа верные, один неверный. Кто занял первое место?

Решение. Ответ Юли верный, иначе никто бы не занял последнее место. Верными являются ответы Алёны и Веры, иначе окажутся занятыми или два первых, или два последних места. (Алёна с Олей, Юля с Алёной, Юля с Верой.) Поэтому неверный ответ дала Оля. Тогда ответы остальных верны. Юля – на последнем месте, Алёна и Оля – на втором и третьем местах, в какой-то комбинации. Первое место заняла Вера.

Ответ. Первое место заняла Вера.

3. На рисунке прямоугольник составлен из 2 двух видов квадратов A и B и двух видов прямоугольников C и E . Одна сторона большого прямоугольника равна 35. Найдите, какой величине может быть равна вторая сторона большого прямоугольника.



Решение. Обозначим сторону маленького квадрата B за x . Одна из сторон прямоугольника C , граничащая с квадратом B , тоже равна x , вторую сторону этого прямоугольника обозначим s . Далее, одна из сторон прямоугольника E , граничащая с

квадратом B , оказывается равной x . Обозначим вторую сторону этого прямоугольника e . Также можно видеть, что сторона квадрата A будет равна $2x$. Сложив стороны фигур по нижнему и по верхнему краю прямоугольника, мы получим, что длина прямоугольника равна $4x + e = e + c + 2x$. Отсюда получаем, что $c = 2x$, и из рисунка получаем, что $e = c + x = 2x + x = 3x$. Значит, можно подставить $e = 3x$, и длина прямоугольника получается $4x + e = 4x + 3x = 7x$. Аналогично, сложив стороны фигур по левому и по правому краю, мы находим, что ширина (высота) прямоугольника равна $3x + c = 3x + 2x = 5x$. Итак, наш прямоугольник имеет длину $7x$, ширину $5x$. Далее рассмотрим два случая, в зависимости от того, является данная величина 35 длиной или шириной прямоугольника.

Первый случай. Длина данного прямоугольника равна 35. Из полученного выше $7x = 35$. Следовательно $x = 5$. Ширина данного прямоугольника равна $5x = 25$.

Второй случай. Если ширина прямоугольника равна 35, т.е. $5x = 35$, то $x = 7$. В этом случае длина исходного прямоугольника равна $7x = 49$.

Ответ. 25 или 49.

4. Элли и Тотошка путешествуют по волшебной стране. Сначала они шли по дороге из желтого кирпича со скоростью 4 км/ч, потом — по дороге из красного кирпича со скоростью 5 км/ч, а затем — по дороге из синего кирпича со скоростью 6 км/ч. За 3 часа они прошли 16 километров. На какой участок они потратили больше времени — на путь по дороге из желтого кирпича или на путь по дороге из синего кирпича?

Решение. Пусть по дороге из желтого кирпича Элли и Тотошка шли a часов, по дороге из красного кирпича они шли b часов, а по дороге из синего кирпича c часов. Тогда $a + b + c = 3$.

Также известно, что $4a + 5b + 6c = 16$. Преобразуем левую часть второго уравнения следующим образом:

$$4a + 5b + 6c = 5a + 5b + 5c - a + c = 5(a + b + c) - a + c = 15 + c - a = 16$$

$$c - a = 1$$

Получаем, что $c > a$. Отсюда следует, что на дорогу из синего кирпича затрачено времени больше, чем на дорогу из желтого кирпича.

Ответ. Они потратили больше времени на дорогу из синего кирпича.

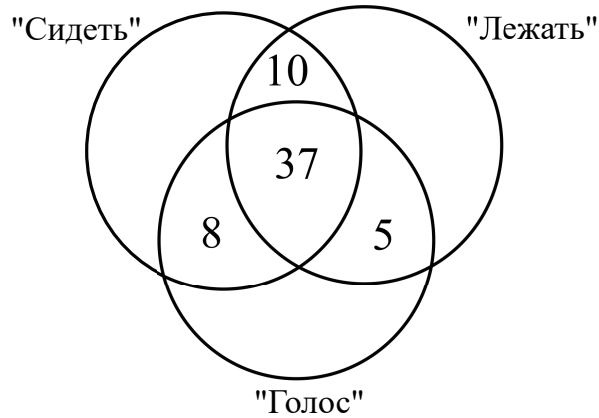
5. Шестьдесят щенков тренируются различать команды «сидеть», «лежать» и «голос». Оказалось, что 55 щенков понимают команду «сидеть», 52 понимают команду «лежать», и 50 щенков понимают команду «голос». Найдите при таких условиях наименьшее возможное количество самых обучаемых щенят — таких, кто понимает все три команды.

Решение.

Оценка. Из условия следует, что 5 щенков не понимают команду «сидеть», 8 не понимают команду «лежать», а 10 не понимают команду «голос». Таким образом, хотя бы одну команду не понимают не более $5 + 8 + 10 = 23$ щенков. Тогда все три команды понимают не менее чем $60 - 23 = 37$ щенков.

Пример. Все три команды понимают ровно 37 щенков, если все остальные понимают ровно по 2 команды. Чтобы это показать, достаточно нарисовать три множества щенков и их пересечения, см. рисунок. Уменьшить центральную область не получится, так как, по доказанному выше, вне этой области расположено не больше 23 щенков.

Ответ. 37



6. Петя взял шесть последовательных целых чисел и расставил их в каком-то порядке по кругу. Затем он попросил Васю посчитать все суммы соседних чисел. Могло ли у Васи получиться в результате 6 последовательных чисел в каком-то порядке?

Решение. Пусть у Пети изначально были числа: $x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4, x + 5$. Пусть у Васи получились числа $y, y + 1, y + 2, y + 3, y + 4, y + 5$. Вычислим сумму чисел Пети:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 = 6x + 15$$

Сумма всех чисел Васи:

$$y + y + 1 + y + 2 + y + 3 + y + 4 + y + 5 = 6y + 15$$

Сумма чисел Васи должна быть в 2 раза больше суммы чисел Пети, так как каждое число Пети в эту сумму входит ровно 2 раза.

$$2(6x + 15) = 6y + 15$$

$$12x + 30 = 6y + 15$$

Это уравнение не имеет решений в целых числах, так как в левой части стоит четное число, а в правой нечетное. Поэтому у Васи не могло получиться ни в каком порядке 6 последовательных чисел.

Покажем, что сумма чисел Васи должна быть в 2 раза больше суммы чисел Пети. (*В работе это утверждение можно не доказывать*).

Пусть Петя расставил числа a, b, c, d, e, f .

Тогда Вася складывает суммы $(a + b), (b + c), (c + d), (d + e), (e + f), (f + a)$.

Сумма этих сумм равна $2(a + b + c + d + e + f)$.

Ответ. Шесть последовательных чисел получиться не могло.