Решения муниципального этапа ВсОШ по математике

7 класс

1. Сестры Маша и Катя участвовали в танцевальном конкурсе. Им необходимо было выполнить 15 заранее определенных движений. За каждое правильно выполненное движение начислялось 10 очков, за каждое неверно выполненное движение снимались 6 очков. Девочки выполнили все движения и набрали 102 и 54 очка соответственно. Сколько движений верно выполнила Маша и сколько Катя?

Решение.

Количество движений	15	14	13	12	11	10	9	8	7
Количество очков	150	134	118	102	86	70	54	38	22

Ответ. Маша верно выполнила 12 движений, а Катя 9 движений.

2. Сестры Маша и Катя купили куклу за две тысячи 700 рублей. У Кати было в три раза меньше денег, чем у Маши и еще 500 рублей. Сколько денег каждая девочка заплатила за куклу?

Решение. Пусть x рублей заплатила Катя. Тогда

$$x + 3(x - 500) = 2700.$$

Ответ. Катя заплатила 1050 руб, Маша 1650 руб.

3. Решите уравнение $\overline{aabb} = \overline{aa}^2 + \overline{bb}^2$. В ответ запишите пару цифр (a, b). Запись $\overline{abcd}$ соответствует четырёхзначному натуральному числу из цифр a, b, c, d. Аналогично для двухзначных чисел. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – различные цифры.

Решение. Имеем: $\overline{aabb} = 1100a + 11b$. По условию

$$1100a + 11b = (11a)^2 + (11b)^2,$$

или $99a + (a + b) = 11(a^2 + b^2)$.

Следовательно, $a + b$ кратно 11. Так как $1 \le a \le 9; 1 \le b \le 9$, то $a + b = 11$, тогда $99a + 11 = 11(a^2 + (11 - a)^2)$, $9a + 1 = a^2 + (11 - a)^2$, $2a^2 - 31a + 120 = 0$, значит, $a = 8, b = 11 - 8 = 3$.

Проверка $8833 = 88^2 + 33^2$.

Ответ. (8, 3).

4. Решите уравнение в натуральных числах $4x^2y - y - 4x^2 = 58$.

Решение. Имеем $4x^2y - y - 4x^2 - 1 = 57$. Разложим на множители левую часть уравнения

$$4x^2(y-1) - (y-1) = (2x-1)(2x+1)(y-1).$$

Получим $(2x-1)(2x+1)(y-1) = 1 \cdot 3 \cdot 19$.

Числа 3 и 19 простые. Множители $(2x-1)$ и $(2x+1)$ отличаются на 2 единицы, как и множители 1 и 3, следовательно,

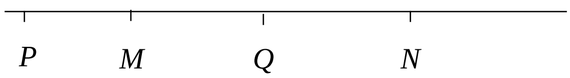
$x = 1, y = 20$.

Ответ. $x = 1, y = 20$.

5. Найти расстояние между точками M и N и точками P и Q на прямой, если точка Q середина отрезка MN, а $PM = x$, $PN = y$.

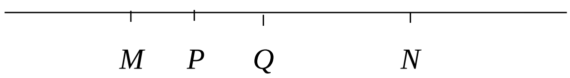
Решение. Возможны два случая: точки M и N лежат с одной стороны от точки P или по разные стороны.

1 случай. Точки M и N лежат с одной стороны от точки P.



1) $x < y$. Тогда $MN = PN - PM = y - x$, $PQ = PN - QN = y - (y - x)/2 = (x + y)/2$.
2) $x > y$. Тогда M и N меняются местами и аналогично получаем: $MN = x - y$, $PQ = (x + y)/2$.
3) $x = y$. Тогда $MN = 0$, $PQ = PM = PN = x = y$.

2 случай. Точки M и N лежат по разные стороны от точки P.



1) $x < y$. Тогда $MN = PN + PM = x + y$, $PQ = (y - x)/2$.
2) $x > y$. Тогда $MN = PN + PM = x + y$, $PQ = (x - y)/2$.
3) $x = y$. Тогда $MN = 2x$, $PQ = 0$.

Ответ. 1. Если $x < y$, то $MN = y - x$ или $MN = x + y$, $PQ = (x + y)/2$ или $PQ = (y - x)/2$.
2. Если $x > y$, то $MN = x - y$ или $MN = x + y$, $PQ = (x + y)/2$ или $PQ = (x - y)/2$.
3. Если $x = y$, то $MN = 0$ или $MN = 2x = 2y$, $PQ = x = y$ или $PQ = 0$.