7 класс

$\boxed{1}$ *Найдите 7 различных натуральных чисел таких, что сумма всех этих чисел делится нацело на каждое из них.*

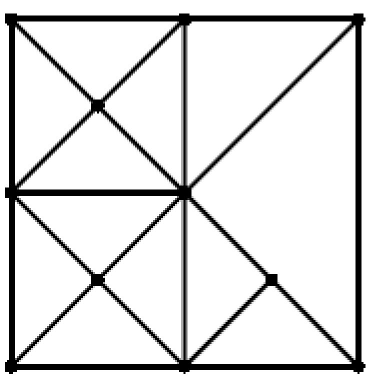
Решение. Например, подходят числа 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48. Здесь каждое число x равно сумме предыдущих (и эта сумма делится на число x), а последующие числа каждое делятся на x, и значит делится на x их сумма.

$\boxed{2}$ *Есть 47 монет: 40 настоящих и 7 фальшивых. Настоящие монеты все весят одинаково. Фальшивые монеты тоже все весят одинаково и фальшивая монета легче настоящей. Чашечные весы без гирь позволяют сравнить две массы: выяснить какая из двух масс больше или установить равенство масс. Как с помощью чашечных весов за три взвешивания определить 5 настоящих монет?*

Решение. Положим на чашки весов по 23 монеты, а одну монету оставим в стороне. Тогда та чашка весов, которая не легче другой, содержит не более 3 фальшивых монет. Возьмем монеты с этой чашки и разложим по 11 на две чашки весов (а одну монету снова отложим в сторону). Та чашка, которая не легче другой, содержит не более 1 фальшивой монеты. Возьмем монеты с этой чашки и разложим по 5 на две чашки весов, и одну монету в сторону. Тогда на той чашке, которая не легче другой, все 5 монет будут настоящие, что и требовалось.

$\boxed{3}$ *Квадрат разрезали на прямоугольные треугольники. Может ли их быть всего три вида, причем первого вида 10 треугольников, второго вида 1 треугольник и третьего вида 1 треугольник? (Внимание: здесь мы считаем, что треугольники одного вида, если они равны между собой)*

Решение. Например,



$\boxed{4}$ *В непрозрачном мешке 1013 белых и 1012 черных шариков, которые не отличаются на ощупь. За один раз можно взять наугад из мешка два шарика. Если они одного цвета, то оба шарика выкидывают и кладут в мешок вместо двух этих шариков один черный шарик. А если шарики разного цвета, то черный шарик выкидывают, а белый возвращают обратно в мешок. Какого цвета может оказаться последний шарик в мешке?*

Решение. Заметим, что в результате одного изъятия пары шариков количество белых шариков либо не меняется, либо уменьшается на 2. Поэтому количество белых шариков после любого хода будет той же четности, что и до хода. Изначально имеется нечетное количество 1013 белых шариков, поэтому количество белых шариков будет нечетным и когда в мешке останется один шарик. Но тогда этот один шарик белый.

$\boxed{5}$ *В клетчатом квадрате* 5×5 *стоят крестики и нолики (в каждой клетке либо крестик, либо нолик). При этом нигде нет трех подряд ноликов ни по вертикали, ни по горизонтали, ни по диагонали. Какое наибольшее число ноликов может быть во всем квадрате?*

Решение. Если угловые квадраты 2×2 заполнены ноликами, а остальные 9 значков крестики, то условие выполняется и всего имеется 16 ноликов. Разместим на доске 8 непересекающихся прямоугольников 1×3 так, чтобы осталась центральная клетка квадрата 5×5. В каждом прямоугольнике по условию не менее одного крестика. Если в центральной клетке тоже крестик, то крестиков не менее 9, а ноликов не более 16.

Рассмотрим случай, когда в центральной клетке стоит нолик. Будем обозначать 12 клетку, стоящую в первой строке и втором столбце (пусть например строки считаются снизу вверх, а столбцы слева направо). Если в клетке 33 стоит нолик, то в каждой из пар клеток 11, 22; 44, 55; 51, 42; 24, 15 есть хотя бы один крестик (всего не менее 4). Кроме того, в каждой тройке клеток 21, 31, 41; 25, 35, 45; 12, 13, 14; 52, 53, 54 есть хотя бы один крестик (всего не менее 4). Если бы крестиков всего было 8, то в клетках 32, 34, 23, 43 стоят только нолики. Но тогда например 32, 33, 34 – три подряд нолика в строке. Противоречие. Значит, предположение, что в 33 стоит нолик, неверно, и крестиков не менее $4+4+1=9$.