

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП**

2023-2024 учебный год

Ответы и решения

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное. Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части, – решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Авторы задач и составители – Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский.

Задача 7.5 предложены А.Д. Терёшиным, задача 7.1 предложена О.И. Южаковым.

7 класс

7.1. В кружке занимаются 19 школьников. На праздник 8 Марта каждый из мальчиков послал по одной открытке некоторым девочкам из кружка (хотя бы одной). Оказалось, что любые два мальчика послали разное число открыток. Какое наибольшее число мальчиков могло быть в кружке?

Ответ. 9.

Решение. Если мальчиков в кружке хотя бы 10, то найдется мальчик, который послал не меньше 10 открыток (так как любые два мальчика послали разное число открыток, и каждый – хотя бы одну). Значит, девочек на кружке не меньше 10. То есть всего в кружке не меньше 20 школьников. Получили противоречие. Значит, мальчиков не больше 9. В кружке может быть ровно 9 мальчиков и 10 девочек. Мальчики могут послать 1, 2, 3 ..., 9 открыток.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что мальчиков не больше девяти – 4 балла.

Приведен пример рассылки открыток для 9 мальчиков – 3 балла.

7.2. Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59. Поезд отправился утром до 12:00, когда часы показывали время $\overline{ab}:\overline{cd}$, а прибыл тогда, когда часы показывали время $\overline{cd}:\overline{ab}$. Сколько времени поезд находился в пути, если известно, что он ехал больше 8, но меньше 9 часов?

Ответ. 8 часов 51 минуту.

Решение. Предположим, что поезд ехал 8 часов и y минут. Из условия следует, что $\overline{cd} > \overline{ab}$. Значит, для того чтобы минуты \overline{cd} на часах стали минутами \overline{ab} должно выполняться равенство: $\overline{cd} + y = 60 + \overline{ab}$. А чтобы часы \overline{ab} стали часами \overline{cd} – равенство $\overline{ab} + 8 + 1 = \overline{cd}$. Из этого равенства следует, что \overline{cd} больше \overline{ab} на 9. Значит, $y = 51$.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 2 балла.

7.3. У фокусника есть 10 цилиндров, ровно в двух из которых сидит по одному кролику. За один вопрос можно указать на 1 или 2 цилиндра, и спросить, сидит ли там хотя бы один кролик (нам ответят «да» или «нет»). Можно ли за 5 вопросов гарантированно найти цилиндр с кроликом?

Ответ. Можно.

Решение. Первые 3 вопроса зададим про 3 пары разных цилиндров. Если нам ответили «да» на один из вопросов, то это означает, что мы нашли два цилиндра, в которых сидит хотя бы один кролик. Задав два вопроса про каждый из этих цилиндров, мы найдем цилиндр с кроликом. Если же нам 3 раза ответили «нет», то в оставшихся 4 цилиндрах сидят 2 кролика. Нам нужно выбрать два цилиндра (из этих 4) и задать 2 вопроса про каждый из выбранных цилиндров. Если нам хотя бы раз ответят «да», то кролик в указанном цилиндре, если два раза ответят «нет», то в оставшихся 2 цилиндрах сидят 2 кролика.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.4. Клетчатый квадрат $31\text{ см} \times 31\text{ см}$ (длина стороны клетки $0,5\text{ см}$), разрезали на 6 клетчатых прямоугольников одинакового периметра. Могло ли оказаться, что суммарная длина разрезов внутри квадрата равна $80,5\text{ см}$?

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть P – периметр одного из этих прямоугольников. Так как длина стороны клетки $0,5\text{ см}$, то периметр P будет целым числом. Суммарный периметр прямоугольников разрезания равен $6P$ – четному числу. В эту сумму входит периметр квадрата, а также удвоенная сумма длин разрезов. Однако число $124 + 161 = 285$ нечетно.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

7.5. В каждой клетке таблицы 3×3 стоит по одному натуральному числу, причём все девять чисел различны. Известно, что можно вычеркнуть по одному такому числу в каждой строчке так, что в каждой строчке суммы двух оставшихся чисел будут равны одному и тому же числу x . Также можно вычеркнуть по одному такому числу в каждом столбце так, что в каждом столбце суммы двух оставшихся чисел будут равны одному и тому же числу y . Может ли оказаться, что $x = y$?

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что $x = y$. Так как строк и столбцов в таблице 6, а в каждой строке и столбце мы выбирали по одному числу, то «выбранных» чисел не больше 6 (из 9, стоящих в таблице). Поэтому найдётся число a , которое не было выбрано. Тогда в строке с числом a будет стоять число $x - a$,

a в столбце с числом a будет стоять число $y - a$. Но мы предположили, что $x = y$. Значит, $x - a = y - a$. В таблице нашлись одинаковые числа, но все числа по условию в таблице различны. Получили противоречие.

Комментарий.

Верный ответ без обоснования – 0 баллов.