Решения задач Муниципального этапа ВСОШ 2023-24

7 класс

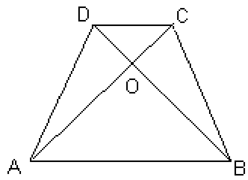
7.1. Петя и Маша пробежали по очереди по два круга на стадионе. Петя бежал оба круга со своей максимальной скоростью и затратил 8 минут. Маша пробежала первый круг со своей максимальной скоростью, а второй круг бежала со скоростью, на 20% меньшей, и затратила 12 минут. Найдите отношение максимальных скоростей Пети и Маши.

Ответ: 4/3. **Решение**. Пусть v (м/мин) – максимальная скорость Пети, u (м/мин) – максимальная скорость Маши, S (м) – длина круговой дорожки. Тогда из условий задачи имеем: $\frac{2S}{v}=8$ и $\frac{S}{u}+\frac{S}{0{,}8\cdot u}=12$. Отсюда $\frac{S}{v}=4$ и $\frac{S}{u}\left(1+\frac{5}{4}\right)=12$. Разделив эти уравнения, получим $\frac{9}{4}\cdot\frac{v}{u}=3 \Leftrightarrow \frac{v}{u}=\frac{4}{3}$.

7.2. Найдите наибольшее семизначное натуральное число, которое составлено из разных цифр и делится на 36.

Ответ. 9876420. **Решение**. Очевидно, нужно старшие цифры искомого числа выбирать как можно большими. Если первые четыре цифры взять самыми большими, а именно 9876, то следующую цифру 5 взять не получится из-за условий делимости на 36 = 4·9. Действительно, если первые пять цифр – это 98765, то по признаку делимости на 9 требуется, чтобы сумма двух последних цифр (которые должны быть не больше 4) давала при делении на 9 остаток 1. Таким образом, сумма двух последних цифр равна 1 или 10. Но числа 01 и 10 не подходят из-за признака делимости на 4 (число из двух последних цифр должно делиться на 4), а сумму 10 нельзя получить из двух цифр, не больших 4. Если же взять четверку на месте цифры сотен, то сумма двух последних цифр должна быть равна 2 или 11, и только число 20 подходит для делимости на 4.

7.3. Пусть O – точка пересечения данных отрезков AC и BD. Известно, что у треугольников ABC и ABD периметры совпадают, и у треугольников ACD и BCD периметры совпадают. Найдите длину AO, если длина BO равна 5 см.



Ответ. 5 см. **Решение.** Так как $P_{ABC} = P_{ABD}$, то $AC + BC = AD + BD$ (см. рис.) Аналогично, так как $P_{ACD} = P_{BCD}$, то $AC + AD = BC + BD$. Приведем второе равенство к виду $AC – BC = BD – AD$ и сложим его с первым: $2AC = 2BD$, то есть, $AC = BD$. Тогда из первого уравнения следует, что $AD = BC$, и поэтому $\Delta ADB = \Delta BCA$ (по третьему признаку равенства треугольников). Следовательно, $\angle ABD = \angle BAC$, то есть, ΔAOB – равнобедренный; $AO = BO$ = 5 см.

7.4. Докажите, что существует сто различных натуральных чисел, квадраты которых отличаются друг от друга только порядком цифр в десятичной записи.

Решение. Рассмотрим числа вида a_n = 100…01 (между двумя единицами n нулей). Тогда $a_n = 10^{n+1}+1$ и $(a_n)^2 = 10^{2n+2} + 2\cdot 10^{n+1} + 1$ = 100…0200…01 (слева и справа от двойки по n нулей). Таким образом, квадраты чисел a_n представляют собой $(2n + 3)$-значные числа 121, 10201, 1002001, …. Чтобы все эти квадраты были с одним и тем же количеством знаков, домножим a_n на соответствующую степень десятки и получим 100 искомых чисел a_{99}, $a_{98}\cdot 10$, …, $a_0\cdot 10^{99}$.

7.5. На столе лежат 99 монет гербом вверх. За один ход можно выбрать любые 5 монет и перевернуть их. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все монеты лежали гербом вниз?

Ответ. 21. **Решение**. Будем считать, что монеты выложены в ряд. Покажем сначала, что число ходов должно быть нечетным. Для этого представим монеты как числа ±1, а ход заключается в смене знака у пяти чисел, герб соответствует (+1), а перевернутая монета (решка) (–1). Рассмотрим число P, равное произведению чисел на столе. Вначале P = +1 и при каждом ходе знак P меняется на противоположный (т.к. меняется знак у пяти сомножителей). В конце должны иметь $P = (–1)^{99}$ = –

1, но за четное число ходов знак у P не меняется. Далее, очевидно, что за 19 (или менее) ходов можно перевернуть не более $19 \cdot 5 = 95$ монет. А за 20 ходов, как мы только что доказали, перевернуть все монеты тоже нельзя. Осталось привести пример на 21 ход. За 19 ходов, последовательно переворачивая по 5 монет, получим $\underbrace{--\ldots-}_{95}++++$ (95 минусов и 4 плюса).

Последние 7 монет за два хода переворачиваем так: $\underbrace{---}++\underbrace{++} \Rightarrow \underbrace{+++++}-- \Rightarrow -------$.