Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный тур

2023 - 2024 учебный год

7 класс

Ответы и решения.

Максимальное количество баллов: 35 .

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача №1

Книги девятитомника оказались расставлены на полке в следующем порядке:

1; 5; 9; 2; 7 ; 3 ; 6; 8; 4.

Требуется расставить их по порядку номеров посредством трёх перестановок, если при каждой перестановке разрешается брать два рядом стоящих тома и в том же порядке ставить их на любое новое место.

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 - итоговая расстановка.

Решение.

Книги будут расставлены по порядку номеров в результате следующих перестановок:

1; 5; 9; 2; 7; 3; 6; 8; 4 – первоначальное положение;
1; 2; 7; 3; 6; 8; 4; 5; 9 – после первой перестановки;
1; 2; 3; 6; 7; 8; 4; 5; 9 – после второй перестановки;
1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 – после третьей перестановки.

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 - итоговая расстановка.

Задача №2

Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 так, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через два, делилась на три?

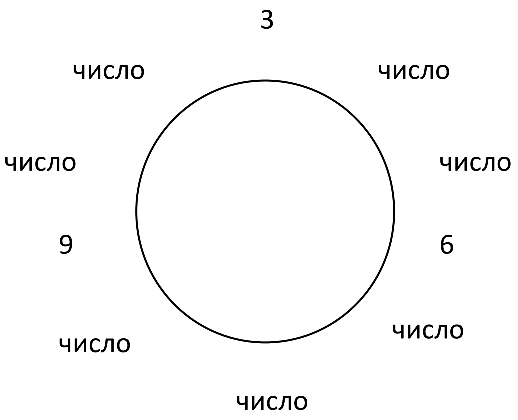
Ответ: Невозможно.

Решение:

Предположим, что можно расставить все натуральные числа от 1 до 10 требуемым образом.
Тогда, сложив все суммы любых двух чисел, стоящих через два, получим, с одной стороны, число, делящееся на три, а с другой стороны, удвоенную сумму всех написанных чисел, так как в рассматриваемые суммы каждое число входит дважды (с левым через два соседом и с правым через два соседом).
Но сумма натуральных чисел от 1 до 10 равна $55 = (1+10) : 2 \cdot 10$, удвоенная сумма равна 110 и на три не делится.
Значит, мы пришли к противоречию и наше предположение о том, что можно расставить все натуральные числа от 1 до 10 требуемым образом, неверно. Таким образом, расстановка невозможна.

Второе решение:

Предположим, что это возможно.
Тогда среди расставленных по кругу чисел наверняка есть число 3.
Заметим, что среди чисел от 1 до 10 есть только два числа (6 и 9), которые в сумме с числом 3 дают результат, кратный трём.
Это означает, что с одной стороны от числа 3 на расстоянии двух чисел стоит число 6, а с другой стороны – число 9.
Тогда получается картинка, изображенная на рисунке.



Заметим, что на расстоянии двух чисел от числа 6 точно окажется не 3 и не 9, однако только 3 и 9 в сумме с 6 дают результат, кратный трем. Получили противоречие – расстановка невозможна.

Ответ: Невозможно.

Задача №3

Трое детей играют камешками. В начальный момент времени у всех троих имеется некоторое их количество.
Затем первый дает из своих камешков второму и третьему по столько, сколько есть у каждого из них.
Затем уже второй мальчик дает двум другим по столько камешков, сколько у них есть в этот момент.
Наконец третий также отдает первым двум по столько камешков, сколько у них есть.
После всех этих операций у каждого ребёнка оказалось по 16 камешков. Сколько камешков было у второго ребенка изначально?

Ответ: У второго ребёнка изначально было 14 камешков.

Первое решение (рассуждения с конца):

В конце получилось у каждого по 16. Так как до этого камешки отдавал третий первому и второму по столько, сколько у них было, то третий дал второму и первому по 8 каждому, то есть ситуация до раздачи была такая:
у первого-8 камешков, у второго – 8 камешков, у третьего 32.
Но эта ситуация была после того, как второй раздал камни:
он давал первому и третьему по столько, сколько у них было.
Значит, первому он дал 4 камешка, третьему 16, всего отдал 20 камешков.

То есть ситуация до раздачи была такая: у первого - 4 камешков, у второго –28 камешков, у третьего 16.
Первый тоже раздавал камешки другим по столько, сколько у них было до этого, то есть он второму дал 14, а третьему 8 камешков, (всего отдал 22), значит, до раздачи у них было: у первого 26 камешков, у второго 14 камешков, у третьего 8 камешков.
Ответ: У второго ребёнка изначально было 14 камешков.

Второе решение:

По условию задачи, так первый раздаёт камешки первым, понятно, что у него их количество больше, чем у второго и третьего.
Пусть было у первого «**x**» камешков, у второго «**y**» камешков, а у третьего – «**z**» камешков.
Тогда после того как первый второму и третьему дал каждому сколько у них было, получилось, что у I осталось **x - (y+ z)** камешков, у II стало **2y** камешков, у III- 2**z.**
После раздачи вторым получается так:
у первого **2(x - (y+ z))=2x-2y-2z,**
у второго **2y-(x - (y+ z) +** 2**z) = 2y –(x- y –z** +2**z) =2y –x+ y –z = 3y –x – z,**
у третьего 4**z.**
После раздачи третьим имеем у первого **4x - 4y - 4z,**
у второго **6y –2x–2z,**
у третьего 4**z** - (2x-2y-2z) –(3y –x–z) = 4**z** - 2x+2y+2z –3y +x+z = **7z - x - y.**
По условию задачи у каждого стало по 16 камешков,
составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 4y - 4z = 16 \\ -2x + 6y - 2z = 16 \\ -x - y + 7z = 16 \end{cases}$$, 1-е разделим на 4, 2-е разделим на 2.

$$\begin{cases} x - y - z = 4 \\ -x + 3y - z = 8 \\ -x - y + 7z = 16 \end{cases}$$, сложим 1-е и 2-е, 1-е и 3-е и разделим каждое на 2

$$\begin{cases} y - z = 6 \\ -y + 3z = 10 \end{cases}$$, получим: **z = 8, y = 14, x = 26 .**
Таким образом, у второго было 14 камешков**.**

Ответ: 14 камешков.

Задача №4

В справочнике «Магия для чайников» написано:

Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные – на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение.

Возможно ли таким образом устроить землетрясение?

(Натуральное число, большее 1, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя).

Ответ: Невозможно.

Решение.

В слове «ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ» буква Е встречается 4 раза, а остальные 9 букв встречаются по одному разу.

Это значит, что в числе 10 цифр будут присутствовать по одному разу, а какая – то одна цифра (соответствующая букве Е) ещё 3 раза сверх того.

Сумма 10 цифр от 0 до 9 равна 45, т.е. кратна 3.

Сумма трёх одинаковых цифр также кратна 3.

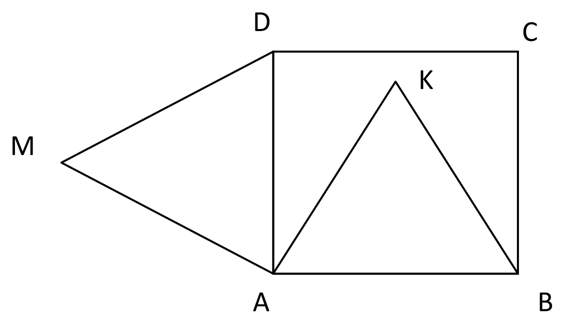
Тем самым, как бы мы не заменяли в слове «ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ» буквы на цифры, сумма цифр полученного числа будет кратна трём. Значит, по признаку делимости на 3 и полученное число будет делиться на 3.

Поскольку, единственное простое число, делящееся на 3, - это само число 3, а наше число заведомо его больше, полученное число не может быть простым.

Ответ: Невозможно.

Задача №5

ABCD – квадрат. Треугольники AMD и AKB оба равносторонние (см . рисунок) .
Лежат ли точки C, K и M на одной прямой?



Ответ: Точки C, K и M лежат на одной прямой.

Решение.
По условию ∠ MAD = ∠ KAB = ∠ KBA = ∠AKB = 60º, ∠ DAB = ∠ CBA = 90º и MA =AD =AB =AK , BC = BA =BK .
Вычислим углы равнобедренного треугольника MAK:
∠ MAK =∠ MAD + ∠ DAB - ∠ KAB = 90º,
∠ AMK = ∠ AKM = (180º - 90º) : 2 = 45º
Вычислим углы равнобедренного треугольника CBK:
∠ KBC = ∠ CBA - ∠ KBA = 30º ,
∠ BKC = ∠ BCK = (180º - 30º) : 2 = 75º.
Имеем ∠ MKC = ∠ AKM + ∠ AKB + ∠ BKC = 45º + 60º +75º =180º,
т.е. точки, и лежат на одной прямой.
Ответ: Точки C, K и M лежат на одной прямой.