

Пермский край
2023-2024 учебный год
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
7 КЛАСС

Время выполнения заданий – 235 минут (3 часа 55 минут).

Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий – 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

7.1. Среди четырех подруг, пришедших на субботник, нет трех с одинаковым цветом джинсов, или с одинаковым количеством карманов на них, или с одинаковой длиной, но у каждых двух совпадает или цвет, или количество карманов, или их длина. Может ли такое быть?

Ответ: может.

Решение. Например, у первой подруги - синие с двумя карманами и длинные, у второй - синие с тремя карманами и укороченные, у третьей - голубые с двумя карманами и укороченные и, наконец, у четвертой - голубые с тремя карманами и длинные.

Критерии оценки:

приведен любой верный пример - 7 баллов,

приведен верный ответ без примера или приведен неверный ответ - 0 баллов.

7.2. В корзине было 45 яблок. Несколько яблок съели за завтраком. 35% от оставшихся дали детям с собой в школу. А из половины яблок, оставшихся после ухода детей в школу, мама испекла яблочный пирог. При этом каждый раз - после завтрака, после ухода детей в школу и после выпекания пирога в корзине оставалось целое число яблок. Сколько яблок ушло на пирог? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: 13.

Решение. Пусть на пирог ушло x яблок. Значит, после ухода детей в школу яблок оставалось $2x$. То есть, после завтрака их было $2x : 65 \cdot 100 = \frac{40}{13}x$. Поскольку количество яблок должно быть целым числом, то $40x$ делится на 13. Так как числа 13 и 40 — взаимно простые, то x будет делиться на 13, то есть $x = 13n$, где n — целое число. Из условия задачи следует, что $\frac{40}{13}x = 40n < 45$. Значит, $n = 1$, тогда $x = 13$.

Критерии оценки:

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,

приведен верный ответ и верное, в целом, обоснование, в котором есть пробелы или неточности - 5 баллов,

приведен верный ответ с проверкой, но не доказана единственность - не более 3 баллов,

приведен верный ответ без обоснований - 1 балл,

приведен неверный ответ - 0 баллов.

7.3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых сумма цифр больше 42?

Ответ: 21

Решение. Наибольшая сумма цифр у пятизначного числа $45 = 5 \cdot 9$, она достигается только у числа 99999. $44 = 4 \cdot 9 + 8$, такая сумма у пяти чисел, так как цифра 8 может быть в любом из пяти разрядов числа. $43 = 4 \cdot 9 + 7 = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 8$. В первом случае чисел тоже 5, а во втором - 10 (первую восьмерку мы можем поставить в любой разряд, вторую - в любой из четырех

оставшихся, т.е. $5 \cdot 4 = 20$, но надо не забыть разделить на 2, так как эти две восьмерки одинаковы и каждое число мы посчитали 2 раза). Итак, чисел $1+5+5+10=21$.

Критерии оценки:

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,
приведен верный ответ и верное, в целом, обоснование, в котором есть пробелы или неточности -5 баллов,
ход решения верный (решение не перебором), но пропущен один из случаев, из-за чего получен неверный ответ. Например, не учтено число 99999 и дан ответ 20 - не более 3 баллов,
решение перебором с потерей случая - не более 1 балла,
приведен верный ответ без обоснований - 2 балла,
приведен неверный ответ - 0 баллов

7.4. Прямоугольник разбит на 9 маленьких прямоугольников. Периметры четырех из них указаны на рисунке. Найдите периметр прямоугольника x .

10		x
11		
12		13

Ответ: 11.

Решение 1. Сравним прямоугольники с периметрами 11 и 12.

Горизонтальные стороны у них равны, а сумма двух вертикальных сторон нижнего на 1 больше суммы двух вертикальных сторон верхнего. Значит, в последнем столбце у среднего прямоугольника периметр тоже на 1 меньше, чем у прямоугольника с периметром 13, т.е. равен 12. рассуждая аналогично с прямоугольниками с периметрами 10 и 11, получим, что $x=12-1=11$.

Решение 2. Пусть ширина первого столбца равна a , третьего столбца равна b , первой строчки - c , третьей строчки - e . Тогда суммы периметров маленьких прямоугольников, стоящих в противоположных углах большого прямоугольника, равны $2a+2b+2c+2e$, т.е. равны. Получим уравнение $12+x=10+13$, отсюда $x=11$.

Критерии оценки:

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,
приведен верный ответ и верное, в целом, обоснование, в котором есть пробелы или неточности -5 баллов,
доказано, что ширина строчек отличается на 0,5 - 2 балла,
приведен верный ответ без обоснований - 2 балла,
приведен неверный ответ - 0 баллов.

7.5. Над каждым столбцом таблицы 5×5 и левее каждой ее строки выписано по натуральному числу, всего 10 чисел. Известно, что каждое из них не больше 12. В каждую клетку A таблицы записана сумма двух чисел: числа, соответствующего столбцу, содержащему клетку A , и числа, соответствующего строке, содержащей A . Докажите, что среди этих сумм найдутся одинаковые.

Решение. Мы не можем получить суммы меньше 2, и больше 24. Если предположить, что никакая сумма дважды не получается, то всего различных сумм не более 23, значит и клеток не более 23. Так как клеток 25, мы получаем противоречие с нашим предположением.

Критерии оценки:

приведен верный ответ с полным обоснованием - 7 баллов,
приведен верный ответ и верное, в целом, обоснование, в котором есть пробелы или неточности -5 баллов,
приведен верный ответ без обоснований или приведен неверный ответ - 0 баллов.