КРИТЕРИИ И МЕТОДИКА ОЦЕНИВАНИЯ
ВЫПОЛНЕННЫХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ
МУНИЦИПАЛЬНОГО ЭТАПА ВСЕРОССИЙСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2023/24 учебный год

8 класс

8.1. (*7 баллов*)

Назовём билет с номером от 000000 до 999999 «отличным», если в записи его номера имеются две соседние цифры, отличающиеся на 5. Сколько всего существует «отличных» билетов?

Ответ: $10^6 - 10 \cdot 9^5$.

Решение: выясним, сколько всего билетов с шестизначным номером: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$ (каждую цифру билета можно выбрать десятью способами).

Выясним, сколько «неотличных» билетов. Пусть $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ – номер «неотличного» билета. В качестве a_1 можно выбрать любую из 10 цифр. Цифры, разность между которыми равна 5, разбиваются на пары: 0–5, 1–6, 2–7, 3–8, 4–9. Поэтому, когда выбрана цифра a_1, в качестве цифры a_2 в «неотличном» билете можно взять любую из 9 цифр (исключается входящая в пару с a_1). Аналогично, после выбора a_2, в качестве a_3 можно взять любую из 9 цифр, и т. д. Поэтому число неотличных билетов равно:

$$10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 10 \cdot 9^5.$$

8.2. (*7 баллов*)

Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 2023. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ: **у**меньшится на 2025.

Решение: пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x + 1)(y - 1) = xy + y – x - 1$. Произведение увеличилось на 2023, то есть $y – x - 1 = 2023$ или $y - x = 2024$.

Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x - 1)(y + 1) = xy - y + x - 1$.

Заметим, что $xy - y + x - 1 = xy - (y - x) - 1 = xy - 2024 - 1 = xy - 2025$. То есть произведение уменьшилось на 2025.

8.3. (*7 баллов*)

Два графика линейных функций пересекаются при $x = 2$. При $x = 8$ значения отличаются на 8. При $x = 20$ значение одной из функций равно 100. Чему может быть равно значение другой функции?

Ответ: 76 или 124.

Решение: пусть $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$ – данные функции. По условию:

$$2k_1 + b_1 = 2k_2 + b_2,$$
$$8k_1 + b_1 - (8k_2 + b_2) = \pm 8,$$
$$20k_1 + b_1 = 100.$$

Нужно найти $20k_2 + b_2$.

Перепишем два первых соотношения в виде:

$$2(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2) = 0,$$
$$8(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2) = \pm 8.$$

Получаем, что $6(k_1 - k_2) = \pm 8$.

Тогда перепишем $20k_2 + b_2$:

$$20k_2 + b_2 = -20\,(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2) + 20k_1 + b_1 =$$
$$= -(2\,(k_1 - k_2) + (b_1 - b_2)) - 18\,(k_1 - k_2) + 20k_1 + b_1 =$$
$$= 0 + 3 \cdot (\pm 8) + 100 = 100 \pm 24.$$

8.4. (*7 баллов*)

Про действительные числа a, b и c известно, что $ab + bc + ca = 3$. Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a(b^2+3)}{a+b} + \frac{b(c^2+3)}{b+c} + \frac{c(a^2+3)}{c+a}?$$

Ответ: 6.

Решение: рассмотрим первое слагаемое искомого выражения. Воспользуемся условием, что $ab + bc + ca = 3$.

Тогда $b^2 + 3 = b^2 + ab + bc + ca = (b + a)(b + c)$.

Следовательно,

$$\frac{a(b^2+3)}{a+b} = \frac{a(b+a)(b+c)}{a+b} = a(b+c).$$

Аналогично для второго и третьего слагаемого получаем:

$$\frac{b(c^2+3)}{b+c} = b(c+a),\ \frac{c(a^2+3)}{c+a} = c(a+b).$$

Таким образом,

$$\frac{a(b^2+3)}{a+b}+\frac{b(c^2+3)}{b+c}+\frac{c(a^2+3)}{c+a}=$$
$$=a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=$$
$$=ab+ac+bc+ba+ca+cb=2(ac+bc+ca)=2\cdot 3=6$$

8.5. (*7 баллов*)

Точка M – середина стороны BC треугольника ABC. На отрезке AC нашлась такая точка D, что DM и BC перпендикулярны. Отрезки AM и BD пересекаются в точке X. Оказалось, что $AC = 2BX$. Докажите, что X – середина отрезка AM.

Решение. Поскольку $DM \perp BC$ и $BM = MC$, то DM — высота и медиана в треугольнике DBC. Следовательно, треугольник DBC равнобедренный и $DB = DC$. На отрезке DC отметим точку Y так, чтобы $DX = DY$. Треугольник DXY получится равнобедренным с основанием XY . Также, по построению, $BX = CY$. Отсюда получаем, что $XY \parallel BC$. Поскольку $AC = 2BX = 2CY$ и точка Y лежит на AC, то она — середина AC. Поэтому XY — средняя линия треугольника AMC, тем самым, $AX = XM$.