# ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 2023-2024 УЧЕБНЫЙ ГОД

## РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

## МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров, К.В.Трунов

Рецензент Р.Н.Гарифуллин

УФА - 2023

**Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий**

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

| **Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
|---|---|
| 7 | Полное верное решение |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение |
| 5-6 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи |
| 0-1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении) |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют |
| 0 | Решение отсутствует |

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
5. Во время проверки работ 30.11.23 и 01.12.23 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2023, ссылка

https://t.me/+kUieh-C3YJQ2MDZi

## 8 класс

1. Кирилл Рыбкин не понял тему «Проценты». Он находит, сколько процентов составляет x от y по формуле $\frac{|x-y|}{y} \cdot 100\%$. С помощью своей формулы Кирилл вычислил, что количество девочек в его классе составляет от количества мальчиков 100%. Сколько процентов, по мнению Кирилла, составляет в его классе количество девочек от количества всех детей класса?

**Решение.** Пусть количество мальчиков m, а количество девочек d. Тогда $\frac{|d-m|}{m} \cdot 100 = 100$. Откуда $d = 0$ или $d = 2m$. В первом случае Кирилл получит $\frac{|d-(d+m)|}{d+m} \cdot 100\% = 100\%$. Во втором случае $\frac{|d-(d+m)|}{d+m} \cdot 100\% = \frac{m}{3m} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$

Ответ. 100% или $33\frac{1}{3}\%$.

**Критерии проверки.** Верно рассмотрен только один из случаев $d = 0$ или $d = 2m$ - 2 балла;
Решение в целом верное, но допущена одна арифметическая ошибка – 6 баллов;
Перепутано количество мальчиков и количество девочек – 0 баллов;
Только верный ответ – 1 балл.

2. На доске записаны три различных нечетных натуральных числа. Разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел не превышает пяти. Аделя перемножила эти три числа и сообщила результат Анне. Анна посчитала сумму цифр в полученном числе и у неё получилось 2023. Докажите, что хотя бы одна из девочек, Анна или Аделя, допустила ошибку.

**Решение.** Поскольку разность между наибольшим и наименьшим числами не больше 5, то написаны три последовательных нечётных числа. Одно из трёх последовательных нечётных чисел кратно трём, потому что у них разные остатки при делении на 3. Значит, и произведение кратно трём, т.е. сумма цифр полученного произведения должна быть кратна трём. Но 2023 не кратно трём. Таким образом, или Аделя, или Анна ошиблись.

**Критерии проверки.** Замечено, что речь идет о трех последовательных нечетных числах – 1 балл. Далее доказано, что произведение кратно 3 – 4 балла (не суммируются).

3. В прямоугольном треугольнике IRN с прямым углом R провели биссектрису IA. Оказалось, что IA=AN. Найти IN, если IR=3.

   **Решение.** Пусть АК – высота треугольника IAN, она же и медиана, т.к. треугольник IAN – равнобедренный. Треугольники IRA и IKA равны по гипотенузе и острому углу. Тогда IR=IK=KN, т.е. IN=6.

   **Критерии проверки.** Замечено, что треугольники IRA и IKA равны, дальнейшего продвижения нет – 2 балла. Замечено, что угол RIN в два раза больше угла RNI, дальнейшего продвижения нет – 2 балла.

4. Воспитательница Людмила выстраивает в ряд двух мальчиков, трёх девочек и кошечку. Кошечку нельзя ставить рядом с мальчиком, а рядом с каждым мальчиком должна находиться хотя бы одна девочка. Сколькими способами воспитательница Людмила может построить всех (детей и кошечку) в ряд?

   **Решение.** Посмотрим, как могут располагаться мальчики, девочки и кошечка. Если кошечку поставили крайней слева, то за ней может стоять только девочка. Далее возможно: ДММД, ДМДМ, МДМД, МДДМ, ММДД – 5 вариантов. Столько же вариантов, если кошечка будет крайней справа (симметричные варианты), ещё 5 вариантов.

   Если кошечка не с краю, то её окружают девочки ДКД. Пусть все остальные находятся слева от этой группы, тогда они могут располагаться: ДММ или МДМ – 2 варианта. Ещё 2 варианта, когда все остальные справа от группы ДКД. Если два ребёнка слева от этой группы, а один справа, то справа могут быть ДМ или МД - 2 варианта. Столько же вариантов, если один ребёнок слева от этой группы, а двое справа. Итого, 18 вариантов распределения детей по полу и кошечки.

   В каждом из вариантов можем распределить мальчиков двумя способами, а девочек 3!=6 способами.

   Итак, всего способов $18 \cdot 2 \cdot 6 = 216$.

   **Ответ.** 216.

   **Критерии проверки.** Только верный ответ – 1 балл. Верно подсчитаны возможные распределения в ряд кошечки и детей по полу, дальнейшего нет – 3 балла. Подсчитаны возможные распределения в ряд кошечки и детей по полу, при этом пропущен 1 случай или два симметричных, дальнейшего продвижения нет – 2 балла. Неверный ответ из-за пропуска одного или двух симметричных случаев распределения кошечки и детей по полу – 5 баллов. Дан ответ в виде числового выражения, не досчитанный до числа в десятичной записи – баллы не снимать.

5. Имеется пачка, состоящая из 2023 карточек, на которых по порядку написаны все числа от 1 до 2023. Также имеется кучка из 2023 камней и огромный пустой бак. Миша и Андрей играют в следующую игру: каждый игрок при своём ходе выбирает любую карточку из пачки, затем он может либо добавить в бак из кучки количество камней, равное числу на выбранной карточке, либо извлечь из бака в кучку это же количество камней. После каждого хода выбранная карточка уничтожается, и ход переходит к другому игроку. Игрок, который не может сделать ход, считается проигравшим. Миша начинает первым. Необходимо определить, кто из них может гарантировать свою победу, независимо от ходов другого игрока.

   **Ответ.** Выиграет Миша.

   **Решение.** Миша возьмёт карточку 2023, положив в бак при этом 2023 камня. Остальные карточки мысленно разобъёт на пары (n; 2023 – n), т.е. (1; 2022), (2; 2021) и т.д. Тогда на любой ход Андрея Миша берёт карточку из той же пары и добавляет камни, если Андрей их добавил и убирает, если Андрей их убирал. Заметим, что при такой стратегии после хода Миши в баке станет 0 или 2023 камня и после хода Андрея и Миши всегда есть ход т.к. сумма чисел в каждой паре 2023. Поскольку количество карточек уменьшается, то игра закончится после хода Миши.

   **Критерии проверки.** Приведён первый ход и верная стратегия – 3 балла. Если при этом обосновано, что данная стратегия работает (т.е. у Миши всегда есть ход) – +3 балла. Если при этом доказано, что тогда Миша выигрывает (карточки когда то закончатся) – +1 балл. Последний пункт может быть доказан неявно, например, написано: «и т.д. до последней карточки».

6. В выпуклом четырехугольнике ABCD точка M – середина стороны AD, $\angle ACB = 90^0$, угол BAC в три раза меньше угла ACD и $AB \parallel CM$. Докажите, что AD = BD.

**Решение.** Пусть $\angle BAC = \alpha$. Отметим точку N – середину AB. Тогда треугольник ANC – равнобедренный и $\angle NCA = \alpha$. В силу параллельности $\angle ACM = \alpha$ и $\angle MCD = 2\alpha$. Тогда CM пересекает отрезки ND и BD в серединах. Обозначим эти точки K и P соответственно. В треугольнике NCD CK – биссектриса и медиана, т.е. $CK \perp ND$. NP – средняя линия треугольника ABD, т.е. MNPD – параллелограмм с перпендикулярными диагоналями, т.е. ромб. Откуда MD = PD, значит, AD = BD.

**Критерии проверки.** Проведена медиана CN треугольника ABC и замечено, что угол NCA равен углу ACM – 1 балл. Доказано, что CM пересекает отрезки ND и BD в серединах, дальнейшего продвижения нет – 2 балла.