Условия и решения задач
(районная математическая олимпиада 2023 г.)

8 класс

1. Решите уравнение в целых числах:

$$5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0.$$

Решение. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно x:

$$5x^2 + (8y - 2)x + 5y^2 + 2y + 2 = 0;$$
$$D = (8y - 2)^2 - 4 \cdot 5(5y^2 + 2y + 2) =$$
$$= 64y^2 - 32y + 4 - 100y^2 - 40y - 40 =$$
$$= -36(y^2 + 2y + 1 = -36(y + 1)^2).$$

Для того, чтобы уравнение имело решение, необходимо, чтобы $D = 0$.Это возможно при $y = -1$,тогда $x = 1$.

Ответ: (1; -1)

2. Какое из чисел больше, $\sqrt{1012 + \sqrt{2023}}$ – $\sqrt{1012 - \sqrt{2023}}$ или $\sqrt{2}$?

Решение. Возведем первое из данных чисел в квадрат:

$(\sqrt{1012 + \sqrt{2023}} - \sqrt{1012 - \sqrt{2023}})^2 =$

$= 1012 + \sqrt{2023} - 2\sqrt{1012 + \sqrt{2023}} \bullet \sqrt{1012 - \sqrt{2023}} + 1012 - \sqrt{2023} =$

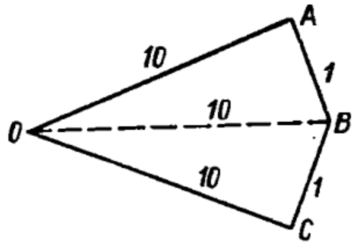
$2024 - 2\sqrt{1012^2 - 2 * 1012 + 1} = 2024 - 2 \bullet (1012 - 1) = 2.$

Следовательно, $\sqrt{1012 + \sqrt{2023}} - \sqrt{1012 - \sqrt{2023}} = \sqrt{2}$.

Ответ: эти числа равны.

3. Верно ли следующее утверждение: сумма расстояний от любой точки внутри выпуклого четырехугольника до его вершин не превышает периметра этого четырехугольника?

Решение. Сформулированное утверждение неверно. Изображенный на рисунке четырехугольник имеет периметр 22, а сумма расстояний $OO + OA + OB + OC = 30 > 22$.



4. Про числа a и b известно, что

$$\frac{1}{3a}+\frac{2}{3b}=\frac{3}{a+2b}.$$

Какие значения может принимать их разность a - b ?

Решение. Из условия следует, что

$$\frac{1}{3a}+\frac{2}{3b}-\frac{3}{a+2b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3b(a+2b)+6a(a+2b)-9ab}{9ab(a+2b)}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{6a^2-12ab+6b^2}{9ab(a+2b)}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{6(a-b)^2}{9ab(a+2b)}=0 \quad\Leftrightarrow\quad a-b=0.$$

Ответ: Только значение 0.

5. В некоторой фирме 17 сотрудников (коллег) используют для общения три мессенджера. При этом любая пара сотрудников общается только в одном мессенджере. Докажите, что можно создать группу, в которую входят не менее трех сотрудников, попарно общающихся друг с другом в одном и том же мессенджере.

*Решение***.** Пусть D_1 – один из сотрудников.

Предположим, что в каждом из мессенджеров он общается не более, чем с 5 сотрудниками или не общается вообще. Тогда количество его коллег не превышает 3·5=15, т.е. всего сотрудников не более 16, что противоречит условию.

Значит, есть мессенджер, в котором D_1 общается, по крайней мере, с 6 коллегами. Обозначим этот мессенджер x, а самих сотрудников - $D_2, D_3, \ldots D_7$.

Если среди сотрудников $D_2, D_3, \ldots D_7$ хотя бы одна пара общается между собой в мессенджере x, то вместе с D_1 они образуют искомую тройку попарно общающихся между собой в мессенджере x, в котором и можно создать групповой чат.

Рассмотрим теперь случай, когда среди сотрудников $D_2, D_3, \ldots D_7$ никто не общается между собой в мессенджере x. Обозначим два других мессенджера, которыми они пользуются y и z.

Допустим, что D_1 для общения с коллегами $D_2, D_3, \ldots D_7$ каждый из мессенджеров y и z либо не использует, либо использует не более чем с двумя коллегами из этого списка. Но, тогда общее количество сотрудников списка не более 2·2=4.

Полученное противоречие доказывает, что хотя бы одним из мессенджеров y или z D_2 пользуется для общения, по крайней мере, с тремя из коллег $D_2, D_3, \ldots D_7$. Будем считать, что это мессенджер y, в противном случае переобозначим мессенджеры y и z.

Пусть D_1 общается в мессенджере y с коллегами D_3, D_4, D_5, иначе переобозначим коллег из списка $D_3, D_4, \ldots D_7$. При этом возможно, что D_2 общается в мессенджере y и с одним или обоими коллегами D_6, D_7.

Если среди сотрудников D_3, D_4, D_5 хотя бы одна пара общается между собой в мессенджере y, то вместе с D_2 они образуют искомую тройку попарно общающихся между собой в одном мессенджере y, в которм и можно создать групповой чат.

Остался единственный случай, когда среди сотрудников D_3, D_4, D_5 никто не общается между собой ни в мессенджере x, ни в мессенджере y. Значит, они все попарно общаются в мессенджере z, в котором и можно создать чат.

Итак, хотя бы в одном из мессенджеров можно создать групповой чат, поскольку есть не менее трех сотрудников, попарно общающихся друг с другом в одном и том же мессенджере. Что и требовалось доказать.