МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ

Республика Бурятия

2023–2024 учебный год

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Улан-Удэ
2023

ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ
И ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ОЦЕНИВАНИЮ РАБОТ

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года в Республике Бурятия проводится по заданиям, подготовленным Региональной предметно-методической комиссией в единый для всех муниципалитетов день — **11 декабря 2023 г.** Муниципальный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 7, 8, 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 5 задач. Продолжительность олимпиады составляет **3 часа 55 минут**. Единое время начала олимпиады для всех муниципалитетов — **10:00** по местному времени.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 35.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

В случае отсутствия *специальных критериев* по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Решение верное, но имеются небольшие недочёты.
5–6	В целом верное решение, которое содержит ошибки, пропущенные важные случаи, не влияющие на логику решения.
3–4	Решение делится на две равноценные части, участником решена одна из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Важно отметить, что жюри НЕ снимает баллы за:

1) объём текста (важно также понимать, что сколь угодно длинный текст без содержательных продвижений никак НЕ ОЦЕНИВАЕТСЯ);

2) почерк или способ оформления;

3) отличие решения участника от авторского.

Черновики работ не проверяются.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Региональная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников муниципалитетов.

8 КЛАСС

8.1. Три различные прямые $y = ax + b$, $y = bx + a$, $y = 3(a + b)x - 4$ пересекаются в одной точке A с координатами $(x_0; y_0)$. Найдите координаты этой точки.

Ответ. $A = (1; 2)$.

Решение. Так как прямые $y = ax + b$ и $y = bx + a$ пресекаются в точке A с координатами $(x_0; y_0)$, то

$$ax_0 + b = bx_0 + a, \text{ или } (a - b)x_0 = a - b, \text{ или } (a - b)(x_0 - 1) = 0.$$

Заметим, что $a \neq b$, так как прямые $y = ax + b$ и $y = bx + a$ различные. А значит, $x_0 = 1$.

Из того, что прямые $y = bx+a$, $y = 3(a+b)x-4$ также пресекаются в точке A с координатами $(x_0; y_0) = (1; y_0)$ следует, что

$$b \cdot 1 + a = 3(a + b) \cdot 1 - 4, \text{ или } 2a + 2b - 4 = 0, \text{ откуда } b = 2 - a.$$

Тогда

$$y_0 = ax_0 + b = a \cdot 1 + 2 - a = 2.$$

Таким образом, $A = (x_0; y_0) = (1; 2)$.

Критерии.

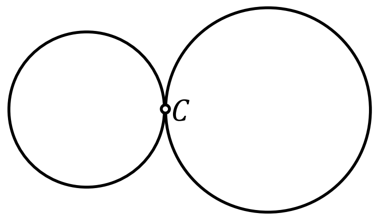
7 баллов — верный ответ и полное верное решение;

не более 5 баллов — в целом верное решение, содержащее неточности или арифметические ошибки;

3 балла — верно найдена координата x_0 точки A, но далее решение не завершено или не верно;

1 балл — верный ответ без обоснования или ответ, найденный подбором.

8.2. Две круговые беговые дорожки стадиона касаются внешним образом в точке старта C (см. рис. справа). Заяц и Волк стартуют одновременно из точки C, но Заяц бежит по дорожке радиуса $R_1 = 150$ метров с постоянной скоростью $2,5$ м/с, а Волк — по дорожке радиуса $R_2 = 210$ метров с постоянной скоростью $\frac{7}{3}$ м/с. Через какое время произойдёт их следующая встреча в точке старта C и Волк поймает Зайца?



Ответ. Через 360π секунд или 6π минут.

Решение. Напомним, длина окружности радиуса R вычисляется по формуле $l = 2\pi R$. Тогда Заяц за один свой круг пробегает $2\pi \cdot 150 = 300\pi$ метров, а Волк — $2\pi \cdot 210 = 420\pi$ метров. Так как скорость Зайца равна $2,5$ м/с, то один свой круг он пробегает за $\frac{300\pi}{2,5} = 120\pi$ секунд, а Волк свой круг пробегает за $\frac{420\pi \cdot 3}{7} = 180\pi$ секунд. Так как НОК(120,180)=360, то следующая встреча Волка и Зайца произойдёт через 360π секунд или 6π минут ($\approx$ 1130,97 секунды или 18,85 минуты). Отметим, за это время Заяц успеет пробежать три малых круга, а Волк — два больших.

Критерии.

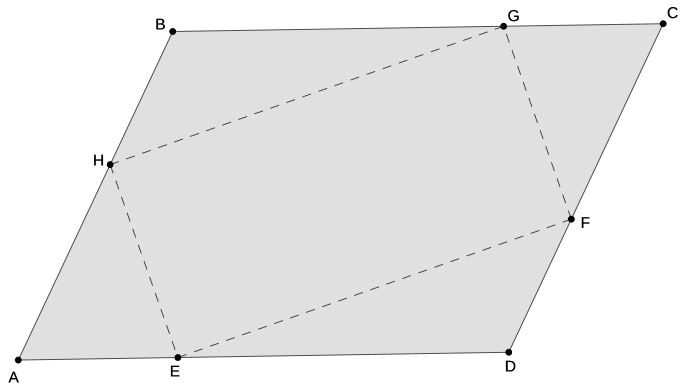
7 баллов — верный ответ и полное верное решение;

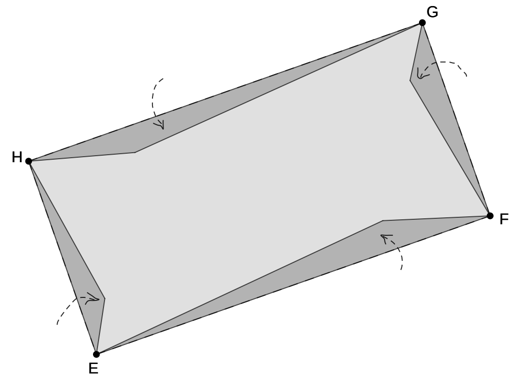
6 баллов — решение в целом верно, но расчёты выполнены с приближённым значением π;

3 балла — решение основано на идее применить формулу длины окружности, но формула не верна (например, $l = \pi R$); при этом решение доведено до конца;

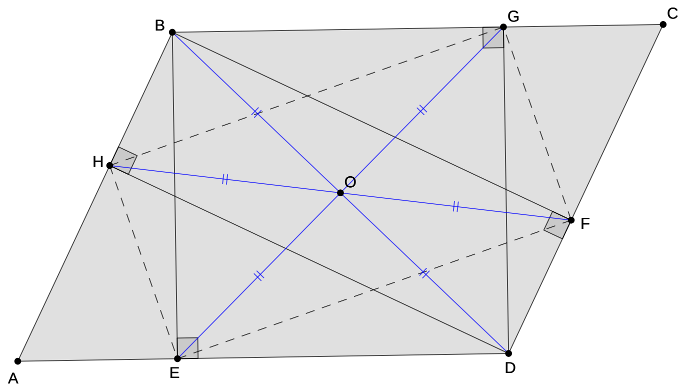
не более 3 баллов — верно подсчитано время, за которое Волк и Заяц пробегают каждый свой круг, но далее решение не верно или не закончено.

8.3. Вася вырезал из бумаги параллелограмм $ABCD$, а затем согнул его так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки E и F — основания высот, опущенных из вершины тупого угла B на стороны AD и CD соответственно, а точки H и G — основания высот, опущенных из вершины угла D на стороны AB и BC соответственно. Докажите, что полученная Васей фигура $EFGH$ — прямоугольник.





Решение. Заметим, что четырехугольник $EBGD$ является прямоугольником. Действительно, $BE \perp AD$, $DG \perp BC$, прямые $ED = AD \parallel BC = BG$. Тогда диагонали прямоугольника $EBGD$ равны и точкой пересечения делятся пополам, т.е. $EO = OG = BO = OD$. Аналогично, четырехугольник $DHBF$ является прямоугольником, так как $DH \perp AB$, $BF \perp DC$, прямые $BH = AB \parallel DC = DF$. Тогда диагонали прямоугольника $DHBF$ равны и точкой пересечения делятся пополам, т.е. $BO = OD = HO = OF$.



Таким образом, $EO = OG = HO = OF$, т.е. диагонали четырехугольника $EFGH$ равны и точкой пересечения делятся пополам, а значит, $EFGH$ — прямоугольник.

Критерии.

7 баллов — приведено полное верное решение;

5 баллов — доказано, что точки являются вершинами параллелограмма;

2 балла — рассмотрен только частный случай.

8.4. Для целых чисел $a,\ b,\ c,\ d$ известно, что

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab-1}{cd-1}.$$

Докажите, что $|a| = |c|$ и $|b| = |d|$.

Решение. Из того, что $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, следует $ad = bc$.

Из того, что $\frac{a}{c} = \frac{ab-1}{cd-1}$, следует $acd - a = abc - c$, или

$$acd - a - abc + c = 0,$$

$$(acd + c) - (abc + a) = 0,$$

$$c(ad + 1) - a(bc + 1) = 0.$$

Учитывая $ad = bc$, имеем $(bc + 1)(c - a) = 0$, откуда (1) $c = a$ или (2) $bc = -1$.

(1) Если $c = a$, то $\frac{a}{c} = 1$. Тогда $\frac{b}{d} = 1$, откуда $b = d$. А значит $|a| = |c|$ и $|b| = |d|$. Доказано.

(2) Если $bc = -1$, то и $ad = -1$. С учётом того, что $a,\ b,\ c,\ d$ целые, имеем четыре случая:

(2.1) $b = 1,\ c = -1,\ a = 1,\ d = -1$;

(2.2) $b = 1,\ c = -1,\ a = -1,\ d = 1$;

(2.3) $b = -1,\ c = 1,\ a = 1,\ d = -1$;

(2.4) $b = -1,\ c = 1,\ a = -1,\ d = 1$.

В любом случае имеем $|a| = |c|$ и $|b| = |d|$.

Критерии.

7 баллов — полное верное решение;

5 баллов — в решении, аналогичном приведённому, доказан пункт (1), а из (2.1)–(2.4) рассмотрены лишь два случая;

4 балла — в решении, аналогичном приведённому, доказан пункт (1), а из (2.1)–(2.4) рассмотрен лишь один случай;

2 балла — доказан лишь один возможный случай — $a = c$ и $b = d$ (пункт (1) в предлагаемом решении);

0 баллов — доказательство, основанное на примере (подбором найдены подходящие значения a, b, c, d).

8.5. Буратино нашёл семь драгоценных камней разного веса. Прибор «Поле чудес» умеет за одно испытание из шести камней выбрать два средних по весу. За какое минимальное число применений прибора Буратино гарантированно сможет найти средний по весу камень?

Ответ. За четыре.

Решение. *Алгоритм.* После первого испытания остаются три подозрительных камня: отложенный и два, выбранные прибором. Сделаем ещё три испытания, каждый раз откладывая новый камень не из первой тройки. Каждый раз определяется новая подозрительная тройка. Докажем, что пересечение всех четырёх этих троек состоит ровно из самого среднего камня X. Действительно, нетрудно проверить, что камень X по весу средний в каждой тройке. Значит, из камней вне первой тройки два легче X и два – тяжелее X. При следующих испытаниях мы обязательно хотя бы раз отложим камень легче X. Но тогда прибор покажет на X и камень тяжелее X, т.е. самый лёгкий камень из первой тройки отсеется. Аналогично из первой тройки отсеется и камень тяжелее X.

Оценка. Трёх испытаний недостаточно. Действительно, пусть при первом испытании мы отложили один из трёх средних камней, и нам даже это подсказали. Тогда мы разбили камни на три средних (отложенный плюс два, указанные прибором) и четыре крайних. Теперь нет смысла откладывать средний: мы и так знаем, что тогда прибор покажет на другие два средних камня. Будем откладывать крайние. Пусть нам не повезло и оба раза мы откладывали крайние, которые легче средних. Тогда прибор оба раза укажет на два более тяжёлых из трёх средних и мы не можем определить, который из них самый средний.

Критерии.

7 баллов — есть верный алгоритм и доказано, что трёх испытаний недостаточно.

4 балла — есть только оценка, что трёх испытаний недостаточно.

3 балла — есть только верный построенный алгоритм на 4 взвешивания.