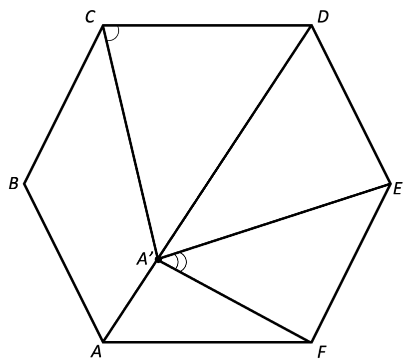
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2022-2023 учебный год
8 класс
Максимальный балл – 35

1. Никита задумал число. Он говорит, что это нечётное двузначное число, у которого обе цифры простые (1 простым числом не является) и что это число делится на сумму своих цифр. Какие числа может задумать Никита? (Найдите все и объясните почему других нет)
Ответ. Только число 27.
Решение. Если число нечётное и оно делится на сумму своих цифр, значит сумма цифр нечётна. Если обе цифры нечётные, то их сумма чётна, а исходное число нечётно, следовательно, такой случай невозможен. Одна из цифр числа чётная, но простое чётное число только одно – 2. Наше число имеет вид $\overline{2b}$, где b может быть равно $3, 5, 7$. Из чисел $23, 25, 27$ подходит только 27.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Найдено число 27 и объяснено почему оно подходит – 3 балла. Задачу можно решать перебором все подходящих чисел. Неполный перебор – 0 баллов. Только ответ – 1 балл.

2. Вася начал выписывать в одну стороку числа. Сначала он записал 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, затем 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, затем 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2 и так далее. После выписанных 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 он продолжает писать и начинает снова с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и так далее. Какая цифра будет на 2023 месте?
Ответ. 2.
Решение. Заметим, что Вася каждый раз выписывает 11 цифр (при этом 10 чисел). Найдём количество перидов $2023/11 = 183\frac{10}{11}$. Таким образом, Вася выписал набор из 10 чисел (11 цифр) полных 183 раза. Каждый одинадцатый набор повторяется, следовательно, набор в котором находится 2023 цифра является остатком деления $183/10$ и плюс 1, то есть четвёртый, а именно 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3. При вычислении $2023/11 = 183\frac{10}{11}$ мы получили 183 целых набора и $\frac{10}{11}$, то есть в 183-м наборе десятая из одиннадцати цифра (не число), а именно 2.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Правильно найдена десятка чисел, но само число не правильно найдено – 3 балла. Правильные рассуждения о поиске периодичности, но при неправильной подсчёте – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.

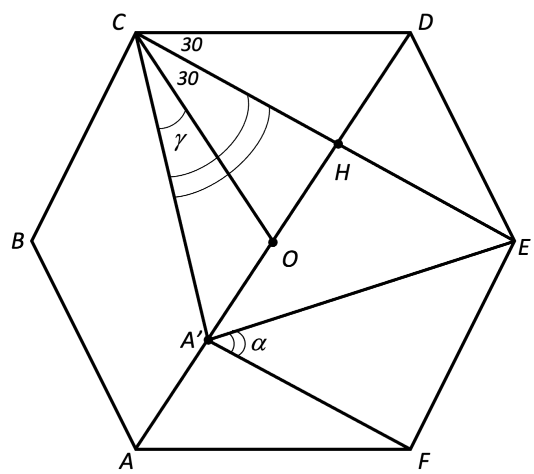
3. Аня, Серёжа и Миша нашли задачу по геометрии: «В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ на диаметре AD отмечена точка A' делящая диаметр в отношении $1:3$ считая от вершины A. Сравните $2\angle FA'E$ и $\angle A'CD$.» У Ани получилось $2\angle FA'E = \angle A'CD$, у Серёжи $2\angle FA'E > \angle A'CD$, У Миши $2\angle FA'E < \angle A'CD$. Кто из ребят прав? (Диаметр – это отрезок, соединяющий противоположные вершины, все диаметры пересекаются в одной точке, каждый в 2 раза больше стороны и точкой пересечения делится пополам.)
Ответ. Прав Серёжа.
Решение. Проведём два дополнительных отрезка: CE и CO, где O – середина диагонали AD.
1. Из условия задачи известно, что диаметры пересекаются в одной точке, точкой пересечения делятся пополам и в 2 раза больше стороны. Тогда проведя все 3 диаметра мы получим 6 равносторонних треугольников с углами по 60 градусов.



2. Мы получили 6 равносторонних треугольников. Рассмотрим равные треугольники ΔCOD и ΔEOD, следовательно, равны треугольники $\Delta COE{=}\Delta CDE$ по трём сторонам. А значит, соответственно равны $OH = HD$.
3. Про отрезок CE. Так как $OH = HD$, то CH является медианой в треугольнике ΔOCD, значит и является биссектрисой и высотой, следовательно, $\angle OCH = \angle DCH = 30$.
4. Заметим, что $\Delta FA'E = \Delta HCA'$ по трём сторонам. Действительно, A' делит диаметр AD в отношении $1 : 3$ считая от вершины A, то есть на четыре равные части, точка O – середина AD, точка H – середина OD. Получаем равенство $AA' = A'O = OH = HD$. Следовательно, $A'H = \frac{1}{2}AD = FE$. Прямая $BF \perp AD$ и делится пополам (рассуждения аналогичны п.2). Значит $\angle A'CH = \angle FA'E = \alpha$ (обозначим их α).
5. Но тогда из $\Delta A'CH$ угол $\alpha = 30 + \angle A'CO = 30 + \gamma$ (см.рис). Тогда получаем следующее

$$2\angle FA'E = 2\alpha = 2(\gamma + 30) = 30 + 30 + 2\gamma, \quad \angle A'CD = \alpha + 30 = 30 + 30 + \gamma.$$

Видно, что $2\angle FA'E > \angle A'CD$, значит прав Серёжа.

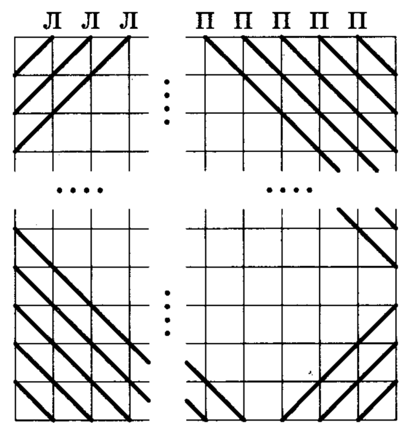


4. В клетчатом квадрате 101×101 отметили все узлы сетки на сторонах, кроме вершин квадрата. Надо разбить отмеченные 400 точек на пары и соединить каждую пару отрезком так, чтобы отрезки не шли по сторонах квадрата и не пересекались. Сколько есть способов это сделать?

Ответ. 101.

Решение. Докажем, что нет отрезков с концами на противоположных сторонах. Предположим противное: пусть отрезок AB с концами на верхней и нижней сторонах. Кроме A и B, на этих сторонах осталось 198 отмеченных точек, а на боковых сторонах – 200 точек. Значит, найдётся отрезок с концами на боковых сторонах. Но он либо лежит на одной стороне квадрата, либо пересекает AB, в любом случае мы получаем противоречие.

Значит, от любой точки на верхней стороне отрезок идёт либо к левой стороне (ставим Л возле точки), либо к правой (ставим П). Заметим, что П не может оказаться левее Л: тогда отрезки из этих точек пересекались бы. Значит буквы распределены так: слева Л (от 0 до 100), справа П (от 100 до 0) Количеством букв Л рапределение букв однозначно определяется (значит, всего есть 101 распределение), и оно однозначно задаёт весь набор отрезков. Действительно, от первой слева буквы Л отрезок идёт к верхней точке на левой стороне (если бы он шёл к другой точке, то отрезок от верхней точки пересекал бы его). Тогда аналогично от второй слева буквы Л отрезок идёт ко второй сверху точке, от третьей – к третьей сверху и так далее. Тем самым эти отрезки оказываются параллельными даигонали и друг другу. Аналогично строятся параллельные отрезки от буквы П к правой стороне. От оставшихся на левой стороне точек отрезки идут к нижней стороне, и они так же параллельны диагонали, но другой. Точно так же достраиваются отрезки от оставшихся точек на правой стороне к точкам на нижней стороне. В результате получаем такую картинку (см. рисунок). В частности если какой-то буквы на верхней стороне совсем не будет, то все 200 отрезков будут параллельны одной диагонали.



5. Натуральные числа x, y, z таковы, что

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}=\frac{2z}{y+z}.$$

Докажите, что yz – точный квадрат.

Решение. Перенесём всё в одну часть и преобразуем:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{z^2}{x^2+z^2}-\frac{2z}{y+z}=\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{z}{y+z}\right)+\left(\frac{z^2}{x^2+z^2}-\frac{z}{y+z}\right)=$$

$$=\frac{y(x^2-yz)}{(x^2+y^2)(y+z)}+\frac{z(yz-x^2)}{(x^2+z^2)(y+z)}=\frac{x^2-yz}{y-z}\cdot\left(\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{z}{x^2+z^2}\right)=$$

$$=\frac{(y-z)(x^2-yz)^2}{(y+z)(x^2+y^2)(x^2+z^2)}=0.$$

Значит, либо $y-z=0$, либо $x^2-yz=0$, а тогда $yz=y^2$ или $yz=x^2$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Возможно решение через формулы сокращенного умножения, нужно проверять правильность преобразований. Решение вида «предположим, что это полный квадрат и подставим в равенство» – 0 баллов.