Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2023 – 2024 учебный год
Математика
8 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2023 – 2024 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений.

Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

8.1. По кругу написано 2023 натуральных числа. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых чётна.

Решение. Сумма 2 чисел будет чётной, если они оба чётные или оба нечётные. Сумма 2 чисел будет нечётной, если одно из них будет чётное, а другое – нечётное.

Допустим, что сумма любых 2 соседних чисел нечётна, тогда чётные и нечётные числа должны чередоваться. Значит, общее число чисел будет чётным, а по условию, чисел 2023– нечётное количество. Значит, допущение сделано неверно, и на самом деле найдутся 2 числа, сумма которых будет чётна.

8.2. Квадратный оконный проём образован тремя прямоугольными рамами (рис.1). Внутри каждой из них написали число, равное периметру рамы. Напишите, чему равна сторона квадрата всего оконного проёма и объясните, как вы её получили.

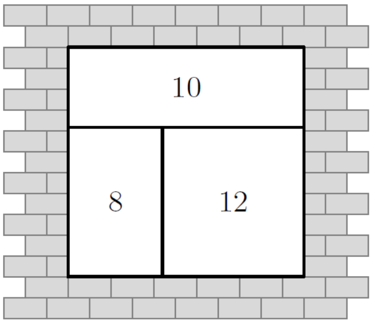

Рис.1

Ответ: 4.

Решение. Пусть сторона квадрата равна a, а высота левого нижнего проема равна b, ширина левого нижнего проема равна c. Тогда высота верхнего прямоугольника равна a - b, ширина равна a; высота правого прямоугольника равна b, ширина равна a - c. Выпишем соотношения периметров трёх прямоугольников:

$$2a + 2a - 2b = 10;\ \ 2b + 2c = 8;\ 2b + 2a - 2c = 12.$$

Сложим два последних равенства, получим $2a + 4b = 20$. Прибавим к результату удвоенное первое равенство, останется $10a = 40$, откуда $a = 4$.

Комментарий. Верное решение любым способом − 7 баллов.

Логически верный ход решения, но из-за арифметической ошибки ответ неправильный − 3 балла.

Подобран пример, где прямоугольники действительно обладают нужным периметром, но не объяснено, как получены длины их сторон − 2 балла.

Только правильный ответ без пояснений − 1 балл.

8.3. Дан числовой ребус: ТЭТА+ БЭТА = ГАММА. (Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым − одинаковые.) Найдите все его решения и докажите, что других нет.

Ответ. 4940 + 5940 =10880

Решение. Т.к. Г − результат переноса в следующий разряд, то Г = 1. Так как А+А заканчивается на А, то А = 0. Значит, переноса в разряд десятков нет, т.е. Т+Т заканчивается на М, и значит, М−четно. Переноса в разряд сотен тоже нет, т.к. иначе нечетное число Э+Э+1 заканчивалось бы на четное М. Т.к. переноса нет, то 2Т<10. Возможные варианты 2, 3, 4. Если Т=2, то Э=7, откуда Б=7, но 7 уже занята. Если Т=3, то М=6, Э=8, откуда Б=6, но 6=М. И последний вариант Т=4. Тогда М=8, Э=9. Откуда Б=5 − противоречия нет. Таким образом, возможен только один вариант: 4940+5940=10880.

8.4. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B проведены высоты BM и BN, а из вершины D —высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P и Q являются вершинами прямоугольника.

Решение. Пусть, для определённости, точка N лежит на прямой AD, а точка Q — на прямой AB (см. рис. 2).

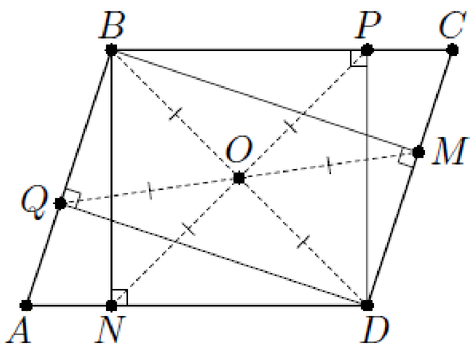

Рис.2

Тогда диагонали BD и PN прямоугольника $PBND$ равны и пересекаются в их общей середине O. Аналогично, диагонали BD и QM прямоугольника $QBMD$ равны и пересекаются в их общей середине O. Значит, и диагонали PN и QM четырехугольника $PQNM$ равны и пересекаются в их общей середине O. Следовательно, $PQNM$ — прямоугольник.

Заметим, что предложенное рассуждение справедливо независимо от того, попадают ли основания высот на стороны параллелограмма или на продолжения сторон.

Возможны и другие способы решения, в частности, использующие вспомогательные окружности и вписанные углы.

Комментарий. Приведено полное решение − 7 баллов.

Доказано только, что указанные точки являются вершинами параллелограмма − 5 баллов.

Разобран только частный случай − 0 баллов.

8.5. Десять футбольных команд сыграли каждая с каждой по одному разу. В результате у каждой команды оказалось ровно по x очков. Каково наибольшее возможное значение x? (Победа − 3 очка, ничья − 1 очко, поражение − 0.)

Ответ: 13.

Оценка. Докажем, что x не может быть больше, чем 13. Действительно, в каждом матче разыграно либо 3 очка (если победила одна из команд), либо 2 очка (если была ничья). Всего было сыграно $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ матчей, значит, разыграно не более, чем 135 очков, то есть сумма очков, набранных всеми командами, не больше, чем 135. Таким образом, $10\,x \leq 1\,35$, то есть $x \leq 13{,}5$.

Так как x — целое число, то $x \leq 13$.

Пример. Покажем, что по 13 очков команды набрать могли. Расположим команды по кругу и разобьём их последовательно на 5 пар. Пусть команды каждой пары сыграли между собой вничью, каждая из них выиграла у четырёх команд, следующих за данной парой по часовой стрелке, а остальным командам проиграла. Тогда каждая команда набрала ровно 13 очков.

Аналогичный пример можно предъявить и в виде таблицы.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A		1	3	3	3	3	0	0	0	0	13
B	1		3	3	3	3	0	0	0	0	13
C	0	0		1	3	3	3	3	0	0	13
D	0	0	1		3	3	3	3	0	0	13
E	0	0	0	0		1	3	3	3	3	13
F	0	0	0	0	1		3	3	3	3	13
G	3	3	0	0	0	0		1	3	3	13
H	3	3	0	0	0	0	1		3	3	13
I	3	3	3	3	0	0	0	0		1	13
K	3	3	3	3	0	0	0	0	1		13

Комментарий. *Полное обоснованное решение* − 7 баллов,
приведены верный ответ и пример − 4 балла,
доказано только, что $x \leq 13$ − 4 балла,
приведен только ответ − 0 баллов.

Интернет-ресурсы:
http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru, https://siriusolymp.ru/mathematics.