МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЕЖИ РЕСПУБЛИКИ КРЫМ
КРЫМСКИЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ИНСТИТУТ ПОСТДИПЛОМНОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ.
2023-2024 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
8 КЛАСС

Задание 8.1.(7 баллов)

Три города A,B,C расположены в вершинах треугольника, а по сторонам идут 3 велосипедные трассы AB→BC→CA. Из пункта A одновременно стартовали 3 велосипедиста. Известны их скорости на каждом из отрезков AB, BC, CA:

	AB	BC	CA
1 вел	12 км/ч	10 км/ч	20 км/ч
2 вел	15 км/ч	15 км/ч	10 км/ч
3 вел	10 км/ч	20 км/ч	12 км/ч

Можно ли по этим данным сравнить длины трасс AB, BC, AC , если прибыли велосипедисты в город A одновременно? Ответ обоснуйте.

Ответ: трассы одинаковые по протяжённости.

Решение.

Обозначим длину каждой трассы AB=x, BC=y, CA=z и выразим время велосипедистов:

$\frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{z}{20}=\frac{x}{15}+\frac{y}{15}+\frac{z}{10}=\frac{x}{10}+\frac{y}{20}+\frac{z}{12}$ или $5x+6y+3z=4x+4y+6z=6x+3y+5z$.

Решая системы уравнений получаем, что $x=y=z$. Значит трассы имеют одинаковую протяжённость.

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение
3	Пришли к выводу $5x+6y+3z=4x+4y+6z=6x+3y+5z$ и рассуждали про равные доли, подбирали числа (на систему не перешли)
1	$\frac{x}{12}+\frac{y}{10}+\frac{z}{20}=\frac{x}{15}+\frac{y}{15}+\frac{z}{10}=\frac{x}{10}+\frac{y}{20}+\frac{z}{12}$ составили одну из зависимостей
0	Приведён только ответ или задача не решена

Задание 8.2.(7 баллов)

Доказать, что число 2023^4+2023^2+1 является составным числом.

Ответ: составное

Решение.

а) $2023^4+2023^2+1=2023^4+2\cdot2023^2+1-2023^2=(2023^2+1)^2-2023^2=$ $(2023^2+1-2023)\cdot(2023^2+1+2023)$- составное

б)$2023\equiv1(\bmod 3)$, тогда $2023^4\equiv1(\bmod 3)$. $2023^2\equiv1(\bmod 3)$

$2023^4+2023^2+1\equiv 0\ (\bmod 3)$

Критерии оценивания:

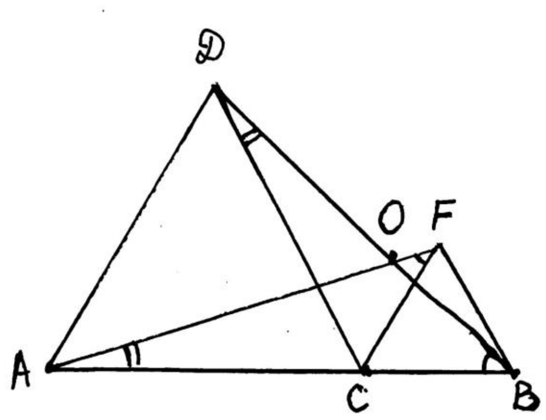
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение
3	Приведена формула $(2023^2+1)^2-2023^2$
0	Приведен только ответ

Задание 8.3.(7 баллов)

На рисунке треугольники ADC и CFB равносторонние . Найдите величину угла AOD.

Ответ:60^0

Решение.



Заметим ,что треугольники $\triangle ACF=\triangle DCB$(по двум сторонам и углу между ними), тогда $\angle CAF=\angle CDB$, $\angle AFC=\angle CBD$. $\angle AOD=\angle ABO+\angle OAB$, $\angle ACD=\angle CDB+\angle CBD$ (по теореме о внешнем угле), т.е $\angle AOD=\angle ACD=60^0$

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение
3	Доказано равенство треугольников ACF и DCB
1	Указано, что $\angle AOD=\angle ABO+\angle OAB$
0	Приведен только ответ

Задание 8.4.(7 баллов)

Найдите все пары целых чисел (***а,в***), которые удовлетворяют условию

$a^2+в^2=a+в+a\cdot в$

Ответ: (а,в): (2;2),(0;0),(1;2),(2;1),(0;1),(1;0)

Решение.

Умножим обе части на 2 и перенесём: $2a^2+2в^2-2a-2в-2aв=0$. Получим

$(a-в)^2+(a-1)^2+(в-1)^2=2$

Сумма квадратов трёх целых чисел равна 2. Рассмотрим возможные случаи:

1. $a-в=0;\ |a-1|=|в-1|=1$ Тогда решение пара чисел (2;2) и (0;0)
2. $a-1=0;\ |a-в|=|в-1|=1$ Тогда решение пара чисел (1;2) и (1;0)
3. $в-1=0;\ |a-в|=|a-1|=1$ Тогда решение пара чисел (2;1) и (0;1)

Критерии оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Задача решена полностью
3	Свели к зависимости: $(a-в)^2+(a-1)^2+(в-1)^2=2$
2	Найдены некоторые 4 пары, удовлетворяющие заданному условию подбором
1	Найдены некоторые 2 пары, удовлетворяющие заданному условию подбором
0	Задача не решена

Задание 8.5.(7 баллов)

На окружности расположено 7 фишек черным цветом вверх (обратная сторона фишек белая). Любые пять фишек, стоящих подряд можно перевернуть. Можно ли за конечное число таких ходов добиться, чтобы все фишки лежали белым цветом вверх?

Ответ: возможно

Решение. Заметим , что если фишку переворачивать нечётное число раз, то она меняет чёрный цвет на белый. Такое возможно сделать за 7 ходов, начиная с фишки 1 и двигаясь от неё по часовой стрелке

	ф	и	ш	к	и		п	о		к	р	у	г	у
№	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7
0	●	●	●	●	●	●	●							
1	○	○	○	○	○	●	●							
2		●	●	●	●	○	●	○						
3			○	○	○	●	○	○	●					
4				●	●	○	●	●	●	○				
5					○	●	○	○	○	○	●			
6						○	●	●	●	●	●	○		
7							○	○	○	○	○	○	○	

Критерии оценивания:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Любое полное обоснованное решение, тактика.
3	Проведены правильные теоретические рассуждения о возможности перевернуть фишки белым цветом вверх.
1	Замечено , что нечетное число переворачиваний меняет цвет фишки на противоположный