8 класс – 2023

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

		2			4						3		

8.1. В строке четырнадцать клеток, в трёх клетках стоят числа (см. рисунок слева). В каждую из одиннадцати свободных клеток нужно записать целое положительное число так, чтобы произведение чисел в любых четырёх подряд идущих клетках было равно 120. Какое число может быть записано в закрашенную клетку? Укажите все возможные значения этого числа. Ответ обоснуйте.

Ответ: 5.

Решение. Так как произведение чисел в любых четырёх подряд идущих клетках одинаково, то для любых пяти подряд идущих клеток записанные в крайних клетках числа должны быть одинаковы, так что записанные числа повторяются через три клетки на четвёртую. Поэтому во второй, десятой и четырнадцатой клетках однозначно должно быть записано число 4, в седьмой и одиннадцатой клетках однозначно должно быть записано число 2. Тогда в девятой (закрашенной) клетке должно быть записано число $120:(2\cdot4\cdot3) = 5$. Это же число 5 должно быть записано в тринадцатой, пятой и первой клетках. Итого:

5	4	2	3	5	4	2	3	5	4	2	3	5	4

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Только верный ответ с верным примером – 2 балла.

8.2. Все восьмиклассники одной из школ писали трудную контрольную работу. Известно, что только 22 восьмиклассника получили оценки «5», «4» или «3». Известно также, что 40% всех восьмиклассников получили оценку «2», а 5% всех восьмиклассников получили оценку «1». Найдите общее количество восьмиклассников, получивших оценки «3», «2» или «1», если «четвёрок» было получено втрое меньше, чем «троек» и на три больше, чем «пятёрок».

Ответ: 33.

1-е решение. Обозначим за n количество «пятёрок». Тогда «четвёрок» было $(n + 3)$, а «троек» было $(3n + 9)$. Из уравнения $n + n + 3 + 3n + 9 = 22$ находим $n = 2$. Обозначим за m количество «единиц». Тогда количество двоек было $8m$ (так как $40\% : 5\% = 8$). Из уравнения $(22 + m + 8m)\cdot5\% = m$ находим $m = 2$. Поэтому общее количество восьмиклассников, получивших оценки «3», «2» или «1», было равно $3n + 9 + m + 8m = 33$.

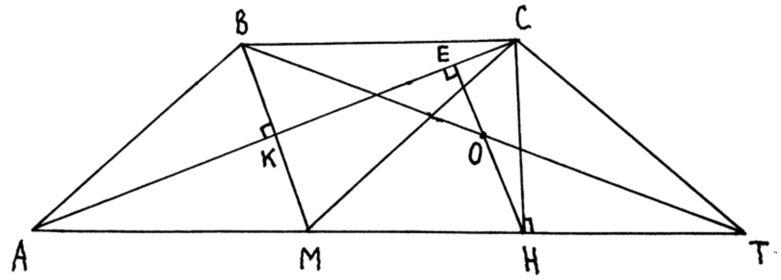
2-е решение. Так как 45% школьников получили оценки «1» и «2», то оценки от «3» до «5» получили 55% школьников. Значит, если всего x школьников, то $11x/20 = 22$, $x = 40$. Тогда оценки «1» и «2» получили 18 школьников. Осталось найти количество школьников, получивших «3». Обозначим это количество за y. Тогда количество школьников, получивших «4» равно $y/3$, а получивших «5» равно $y/3 - 3$. Получим уравнение $5y/3 - 3 = 22$, $y = 15$. Значит, оценки «1», «2» и «3» получили 33 школьника.

8.3. Найдите все тройки положительных целых чисел a, b и c, для которых $2a/(2+a) = 3b/(3+b) = 4c/(4+c)$.

Ответ: a = 12, b = 4, c = 3 – единственное решение.

Решение. Из первого уравнения после преобразований получим $ab - 6a - 6b = 0$. Перепишем это уравнение в виде $(a + 6)(6 - b) = 36$. Уравнение $3b/(3+b) = 4c/(4+c)$ запишем в виде $(b + 12)(12 - c) = 144$. Для первого уравнения решения в положительных целых числах (a; b): (3; 2), (6; 3), (12; 4), (30; 5). Решения второго уравнения (b; c) с учетом значений b = {2, 3, 4, 5} из первого уравнения: (4; 3).

Комментарии. Только верный ответ – 1 балл. Получение уравнений с разложением левой части на множители – 2 балла. Получение решений для одного из уравнений – 2 балла.



8.4. В трапеции ABCT стороны AB , BC и CT равны, точка H - основание перпендикуляра, опущенного из точки C на основание AT. Докажите, что если из точки H провести прямую, перпендикулярную диагонали AC , то эта прямая пройдёт через середину диагонали BT.

Доказательство. Пусть HE и BT пересекаются в точке O . Отметим на стороне AT точку M так, что AM = BC . Тогда ABCM – ромб, значит его диагонали перпендикулярны и прямые MB и HE параллельны, так как они перпендикулярны прямой AC. В равнобедренном треугольнике MCT (MC = AB = CT) высота CH является медианой стороны MT, поэтому MH = HT и HO – средняя линия треугольника MTB . Следовательно, точка O – середина BT.

8.5. Антон выбирает произвольно целое положительное стартовое число n , не являющееся точным квадратом. Затем Борис прибавляет к n число $n+1$. Если получившаяся сумма является точным квадратом, то Борис выигрывает. Если же получившаяся сумма не является точным квадратом, то Антон прибавляет к этой сумме число $n+2$. Если получившаяся сумма является точным квадратом, то Антон выигрывает. Если же получившаяся сумма не является точным квадратом, то Борис прибавляет к этой сумме число $n+3$. И так далее. Покажите, что найдутся не менее 2023 целых положительных чисел стартовых чисел n , когда Антон сможет обеспечить свой выигрыш.

Доказательство. Достаточно заметить, что Антон всегда выигрывает, выбирая в качестве n число вида $3k^2 - 1$, где k – произвольное целое положительное число. Действительно, число вида $3k^2 - 1$ даёт при делении на 3 остаток 2 и, следовательно, не является точным квадратом. Число $3k^2 - 1 + 3k^2 = 6k^2 - 1$ тоже даёт при делении на 3 остаток 2 и, следовательно, тоже не является точным квадратом. А число $6k^2 - 1 + 3k^2 + 1 = 9k^2 = (3k)^2$.