Критерии оценивания, задания и ответы к заданиям МЭ ВсОШ

по математике

2023-2024 учебный год

8класс

1. В ряд выписано 25 чисел: 1 0, или -1. Сумма любых четырех подряд идущих чисел отрицательна. Может ли сумма всех выписанных чисел быть положительной?

Решение

Чтобы выполнить условие положительности суммы всех 25-ти чисел, любые четыре подряд идущие числа должны быть таковы, чтобы их сумма была наибольшей отрицательной, раз она отрицательная по условию. Наибольшая отрицательная сумма четырех чисел, среди которых могут быть только 1, 0 и -1, не больше -1. Тогда наибольшая отрицательная сумма 24-х чисел не превосходит -6. Если 25-е число есть 1, то сумма не превзойдет -5. Значит, положительной сумма всех чисел быть не может.

Критерий оценивания

Только ответ – 0 баллов.

Есть верная оценка наибольшей суммы всех 25 чисел, но в обосновании этой оценки есть пробелы (например, отсутствует объяснение для наибольшей суммы первых 24-х чисел) – 5 баллов.

2. Из пунктов А и В одновременно выехали велосипедист и мотоциклист соответственно. Через 30 минут велосипедист оказался ровно посередине между А и мотоциклистом. Еще через 5 минут они встретились. Сколько времени велосипедист будет ехать из А в В?

Решение

Расстояние между велосипедистом и мотоциклистом через 30 минут после начала движения равно расстоянию, которое велосипедист проезжает за 30 минут. А поскольку это расстояние велосипедистом и мотоциклистом было преодолено при сближении за 5 минут, то расстояние, которое мотоциклист проезжает за 5 минут, велосипедист проезжает за 25 минут, то есть скорость мотоциклиста в 5 раз больше скорости велосипедиста.

Расстояние, которое мотоциклист проехал за 30 минут, велосипедист будет ехать 2,5 часа. Велосипедисту потребуется 3,5 часа, чтобы доехать из А в В.

Критерий оценивания

Получение обоснованного вывода о том, что скорость мотоциклиста в 5 раз больше скорости велосипедиста или аналогичного утверждения, оценивается в 5 баллов. Верно и обоснованно решенная задача оценивается в 7 баллов.

3. Найти все возможные целые значения m, при которых оба числа $\frac{m-5}{15}$ и $\frac{m-6}{24}$ являются целыми.

Решение

Пусть требование задачи выполнено и существует такое m, при котором обе дроби являются целыми. Тогда из данных дробей получаем, что $m = 15k + 5$ и $m = 24t + 6, k, t \in Z.$ Из этих записей следует, что m делится нацело на 5 и 6. НОД(5;6)=1, значит m делится на 30 и, следовательно нацело делится на 15, а это противоречит тому, что остаток от деления m на 15 равен 5. Значит, таких m не существует.

Критерий оценивания

Попытка решить задачу перебором оценивается в 0 баллов.

Доказано, что m делится на 5 (или на 6) – 1 балл.

Доказано, что m делится на 5 и на 6 – 3 балла.

Проведено верное рассуждение, но не указано, что 5 и 6 взаимно простые числа – 6 баллов.

4. Докажите, что если перемножить любые четыре последовательных натуральных числа и к полученному произведению прибавить 1, то получится полный квадрат натурального числа.

Решение

Составляемое по условию выражение имеет вид $n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) + 1$.
Преобразуем это выражение и получаем
$(n^2+3n) \times (n^2+3n+2) + 1 = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) + 1 = (n^2+3n+1)^2$ и $n^2 + 3n + 1$ является натуральным числом при любом натуральном n.

Критерий оценивания

Вывод, основанный только на приведении примеров – 0 баллов.

Правильно составленная модель задачи (выражение $n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) + 1$ или ему аналогичное) – 1 балл.

Все преобразования проведены верно, но не указано, что выражение, стоящее под квадратом, принимает только натуральные значения – решение оценивается в 7 баллов (баллы не снимаются).

5. Можно ли на плоскости провести 6 различных прямых и отметить на них несколько точек так, чтобы на каждой прямой лежало бы 3 точки и каждая точка принадлежала бы ровно трем прямым?

Решение

Найдем количество точек двумя способами.

С одной стороны, на каждой прямой лежит 3 точки, значит $6 \times 3 = 18$, но здесь каждая точка учтена трижды, так как каждая точка принадлежит трем прямым. Значит $\frac{18}{3} = 6$ точек.

С другой стороны, возьмем любую точку, она общая для трех прямых. Таким образом, на каждой из этих прямых лежит еще по две точки, и никакая из этих точек не может быть общей для каких-то двух из этих прямых, иначе эти прямые совпадают. Получаем, что точек всего не меньше семи.

Получили противоречие. Значит, нельзя.

Критерий оценивания

Проведение только одной линии рассуждений (в решении две линии рассуждения, они обозначены «С одной стороны», «С другой стороны») оценивается в 3 балла.

Только верный ответ – 0 баллов.