

**Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2023-2024 учебный год, 8 класс**

8.1. Бабушка с двумя внуками пошла в кино. Через некоторое время бабушка вспомнила, что забыла очки и отправила одного внука за ними, а второго внука в кинотеатр посмотреть время начала сеанса. Первый внук прибежал домой, схватил очки и побежал в кино, а второй добежал до кинотеатра и побежал навстречу бабушке. Внуки встретились с бабушкой, когда она прошла ровно две трети пути от дома до кинотеатра. Во сколько раз внуки бегают быстрее, чем ходит бабушка, если известно, что бегают они с одинаковой скоростью?

Ответ: В 3 раза.

Решение. Так как внуки встретились с бабушкой одновременно, они пробежали одинаковые расстояния. Сумма этих расстояний равна, очевидно, удвоенному расстоянию от дома до кинотеатра, поэтому каждое из них равно расстоянию от дома до кинотеатра. Такое возможно только если внуки побежали, когда бабушка прошла ровно треть пути до кинотеатра. Таким образом, за время, пока бабушка прошла треть пути до кинотеатра, каждый из внуков пробежал втрое большее расстояние, откуда и получаем ответ.

8.2. Разложить на множители: $x^2(x^2 + 2023) + \frac{2024^2}{4}$

Ответ: $(x^2 - x + 1012)(x^2 + x + 1012)$.

Решение: $x^2(x^2 + 2023) + \frac{2024^2}{4} = x^4 + 2023x^2 + 1012^2 = (x^4 + 2024x^2 + 1012^2) - x^2 = (x^2 + 1012)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1012)(x^2 + x + 1012)$.

8.3. В треугольнике ABC провели биссектрису BD, а в треугольниках ABD и CBD биссектрисы DE и DF соответственно. Оказалось, что $EF \parallel AC$. Найдите угол DEF.

Ответ. 45 градусов.

Решение. Пусть отрезки BD и EF пересекаются в точке G. Из условия имеем $\angle EDG = \angle EDA = \angle DEG$, откуда $GE = GD$. Аналогично, $GF = GD$. Значит, $GE = GF$, то есть BG — биссектриса и медиана, а значит, и высота в треугольнике BEF. Отсюда DG — медиана и высота, а значит, и биссектриса в треугольнике EDF, откуда $\angle DEG = \angle EDG = \angle FDG = \angle GFD$. Поскольку сумма четырёх входящих в последнее равенство углов равна 180 градусам, каждый из них равен 45 градусам.

8.4. Даны три цифры: a , b и c . Оказалось, что шестизначные числа \overline{abcabc} и \overline{ababab} относятся как 55:54. Чему может быть равно число \overline{abc} ? (Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет)

Ответ.185.

Решение. По условию $55\overline{ababab} = 54\overline{abcabc}$. Это равенство можно переписать в виде $55 \cdot 10101\overline{ab} = 54 \cdot 10010\overline{ab} + 54054c$, откуда

$(555555 - 540540) \overline{ab} = 54054c \Leftrightarrow 15015\overline{ab} = 54054c \Leftrightarrow 5\overline{ab} = 18c$, откуда $c = 5, \overline{ab} = 18$

Критерии. Приведён один пример, но не доказано, что нет других вариантов-1 балл.

8.5. Вася и Петя играют в такую игру: Вася разрезает квадрат 10×10 на полоски толщиной в одну клетку (с любыми натуральными длинами). После этого Петя выбирает любое число $k, 1 \leq k \leq 10$, и удаляет все полоски длины k . Какое наибольшее число клеток Петя гарантированно может удалить независимо от действий Васи? (Приведите пример и докажите, что другого варианта нет)

Ответ: 12.

Решение. Вот пример разрезания на полоски, когда Пете не удастся удалить больше 12 клеток (разрезания по строкам): 10, 9+1, 8+2, 7+3, 6+4, 6+4, 5+5, 4+2+2+2, 3+3+3+1. Допустим, есть разрезание, где Пете не удастся удалить больше 11 клеток. Тогда в этом разрезании не больше, чем по одной полоске длины 10, 9, 8, 7 и 6, не больше, чем по две полоски длины 5 и 4, не больше трех полосок длины 3, пяти полосок длины 2 и 11 полосок длины 1. Суммарная площадь этих полосок не больше 88, что меньше площади квадрата 10×10 . Противоречие.

Критерии оценивания.

Пример без оценки– 3 балла, оценка без примера – 4 балла