

**Критерии и ключи проверки муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников в Республике Карелия
в 2023–2024 учебном году
по математике**

8 класс

№1 (7 баллов). В городе N на автобусной остановке «Наука» в 9:00 встретились 3 автобуса — первого, второго и третьего маршрутов. Известно, что интервал движения автобусов первого маршрута составляет 5 минут, второго — 7 минут, третьего — 11 минут. В какое время автобусы этих маршрутов встретятся в следующий раз на остановке «Наука»?

Ответ. 15:25.

Решение. Чтобы узнать через сколько минут они встретятся снова нужно найти НОК (5;7;11). Так как числа имеют только один общий делитель равный 1, то наименьшее общее кратное равно их произведению, т.е. НОК (5;7;11) = 385 (минут) = 6 часов 25 минут. Поскольку автобусы 1-го, 2-го и 3-го маршрутов встретились в 9:00, то в следующий раз они встретятся в 15:25.

Критерии:

- Решение задачи имеет частичное продвижение – 2-4 балла.
- Приведено решение и получен верный ответ — 7 баллов.

№2 (7 баллов). Не выполняя вычисления, докажите, что число $2022 \cdot 2023 \cdot 2024 \cdot 2025 + 1$ является квадратом натурального числа.

Решение. Заметим, что рассматривается произведение 4-х последовательных натуральных чисел. Обозначим, например, $2023 = k$, тогда:

$$\begin{aligned} 2022 \cdot 2023 \cdot 2024 \cdot 2025 + 1 &= (k-1) \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + 1 = k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k + 1 = \\ &= k^4 + 2k^2 \cdot (k-1) + (k-1)^2 = (k^2 + k - 1)^2. \end{aligned}$$

Критерии:

- Замечено, что рассматривается произведение 4-х последовательных натуральных чисел – 2 балла.
- Выполнены преобразования, но есть ошибки или решение не доведено до конца – 4 балла.
- Полное решение – 7 баллов.

№3 (7 баллов). Маша и Даша играют в следующую игру: на доске в ряд записаны числа от 1 до 99. Девочки ставят знаки «+» (сложить) или «×» (умножить) перед любым числом (начиная со второго), перед которым знак еще не стоит. Они делают это по очереди, но известно, что первый ход делает Маша. После того, как все знаки расставлены, девочки вычисляют значение полученного выражения. Если результат является нечётным числом, то выигрывает Маша и Даша отдает ей шоколадку, а если чётным – выигрывает Даша и Маша отдает ей шоколадку. Сможет ли Даша получить шоколадку от Маши независимо от ее действий?

Ответ: Да, может.

Решение. Для достижения успеха Даша может пользоваться симметричной стратегией: если Маша ставит какой-то знак между числами k и $k + 1$, то Даша ставит такой же знак между числами $99 - k$ и $100 - k$. Выражение, которое получится в конце игры, будет содержать несколько слагаемых – произведений, причём слагаемое, содержащее число 50, является чётным, а остальные слагаемые разобьются на пары «симметричных» слагаемых одинаковой чётности. Таким образом, выражение, полученное в конце игры, окажется чётным.

Критерии:

- Приведен только верный ответ или ответ, сопровождаемый неверными рассуждениями – 0 баллов.

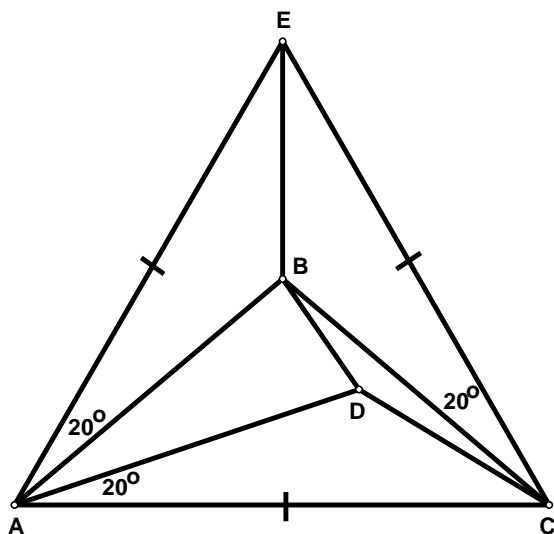
▪ Определена симметричная стратегия, но дальнейшие рассуждения ошибочны – 4-5 баллов.

▪ Полное решение – 7 баллов.

№4 (7 баллов). В равнобедренном треугольнике ABC углы A и C равны 40° . Внутри треугольника ABC взята точка D так, что $\angle DAC = 20^\circ$, $\angle DCA = 30^\circ$. Точки B и D соединены отрезком. Определить величину угла ABD .

Ответ. 80° .

Решение. Дополним данный треугольник ABC до равностороннего треугольника AEC . Проведем отрезок BE . Треугольники ABE и CBE равны (по трём сторонам). Следовательно, угол BEA равен 30° . Треугольники ABE и ADC равны (по стороне и двум прилежащим углам). Поэтому $AB = AD$ и треугольник ABD равнобедренный. Поскольку угол BAD равен: $40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$, то искомый угол ABD равен: $(180^\circ - 20^\circ) / 2 = 80^\circ$.



Критерии:

▪ Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи – 2-4 балла.

▪ Полное решение – 7 баллов.

Максимальный балл за все выполненные задания — 28.