Математика 2023-24

8 класс

1. Решите уравнение в натуральных числах

$$x^2-3x+xy-3y=6.$$

Ответ: (4,2).

Решение:

$$x^2-3x+xy-3y=6$$

$$x(x-3)+y(x-3)=6$$

$$(x-3)(x+y)=6$$

Так как $x-3\geq 1$, то $x+y\geq 5$. Учитывая, что $x+y$ является делителем числа 6, получаем

$$\begin{cases} x-3=1 \\ x+y=6. \end{cases}$$

Откуда

$$x=4, y=2.$$

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

С помощью группировки получено разложение на множители числа 6, но дальше результативных рассуждений нет – 2 балла.

Только ответ, но не доказано, что он единственный – 1 балл.

2. Про натуральные числа a и b известно, что $\frac{\text{НОД}(a+b,a-b)}{\text{НОД}(a,b)}=2023$. Докажите, что $\frac{a+b}{\text{НОД}(a,b)}$ – целое нечетное число.

Решение:

Обозначим $d=\text{НОД}(a,b)$, $a=x\cdot d$, $b=y\cdot d$. При этом x, y – натуральные взаимно простые числа. Тогда по условию

$$\frac{\text{НОД}(\ (x+y)\cdot d,\ (x-y)\cdot d\ )}{d}=2023$$

$$\frac{d\cdot\text{НОД}(x+y,x-y)}{d}=2023$$

$$\text{НОД}\,(x+y,x-y)=2023.$$

Числа $x+y$, $x-y$ одной четности, их наибольший общий делитель может быть нечетным числом, только если они оба нечетные.

Требуемое доказано, так как $\frac{a+b}{\text{НОД}(a,b)}=\frac{(x+y)\cdot d}{d}=x+y$.

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Доказано, что $\text{НОД}(x+y, x-y) = 2023$ – 4 балла.

3. В круговом турнире (каждая команда играет с каждой) приняли участие 4 команды. За поражение в игре команде присуждается 1 очко, за ничью – 0.5, проигравшая команда очков не получает. Оказалось, что команда, занявшая первое место, набрала 3 очка, а команды, занявшие 3 и 4 места набрали одинаковое количество очков, отличное от числа очков команды, занявшей второе место. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?

Ответ: 2

Решение вариант 1:

Назовем команды, занявшие 1, 2, 3 и 4 места – соответственно A, B, C, D. Каждая команда сыграла 3 игры. Значит, команда A победила всех соперников, и они в играх с командой A очков не получили.

Оставшиеся три команды сыграли между собой три игры. Если команда C победила команду D, то команда C набрала 1 очко, а команда D не получила очков. Чтобы по очкам команды C и D сравнялись, нужно, чтобы D победила команду B. В этом случае команда B не сможет набрать количество очков, большее C и D, что противоречит условию.

Аналогично команда D не могла победить команду C. Значит они сыграли вничью. Тогда они должны были одновременно победить, проиграть или сыграть вничью с командой B. Единственный вариант, при котором B получает больше очков, – команда B одновременно побеждает команды C и D, а, значит, она набирает 2 очка.

Решение вариант 2:

Назовем команды, занявшие 1, 2, 3 и 4 места – соответственно A, B, C, D. Каждая команда сыграла 3 игры. Значит, команда A победила всех соперников, и они в играх с командой A очков не получили.

Оставшиеся три команды сыграли между собой три игры, в которых разыгрывается 3 очка. Так как команда B получила очков больше чем каждая из команд C и D, то она получила больше 1 очка. Но получить полтора очка она не могла, так как оставшиеся полтора очка нельзя разделить поровну между C и D.

Значит команда B получила 2 очка. Вариант, когда это возможно, – команда B побеждает команды C и D, которые сыграли между собой вничью.

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Отмечено, что команды B, C, D разыгрывают между собой 3 очка – 1 балл.

Только ответ – 0 баллов.

Приведен пример, когда команда B набирает 2 очка, но не показано, что этот вариант единственный, – 2 балла.

4. В треугольнике ABC провели биссектрису AK и выбрали точку F на стороне AB так, что KF является биссектрисой угла AKB. Точка M – середина стороны AC. Найдите угол AMF, если известно, что AK=KC, а длина отрезка KM в два раза меньше длины FM.

Ответ: 30 градусов.

Решение:

Обозначим угол BAC за 2α. Треугольник AKC – равнобедренный, поэтому угол KCA равен α. Тогда угол BKA как внешний угол треугольника AKC равен 2α.

Так как FK – биссектриса угла BKA, угол FKA = KAM = α, а эти углы – накрест лежащие при прямых FK и AM и секущей AK. Значит, прямые FK и AM параллельны.

Так как KM – медиана в равнобедренном треугольнике AKC, KM ⊥ AC, следовательно, KM ⊥ FK.

Треугольник FKM – прямоугольный, катет KM в два раза меньше гипотенузы FM. Значит, угол KFM равен 30 градусов. Угол AMF равен ему, так как эти углы – накрест лежащие при параллельных FK и AM и секущей FM.

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Доказано, что прямые FK и AM параллельны – 3 балла.

Доказано, что треугольник FKM прямоугольный – 5 баллов.

Только ответ – 0 баллов.

5. На клетчатом поле 4х4 находятся 16 человек (по одному в каждой клетке), каждый из которых является рыцарем или лжецом. Лжецы всегда врут, а рыцари всегда говорят правду. Какое наибольшее количество рыцарей можно разместить на этом поле, если каждый из присутствующих заявил: «среди моих соседей есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец»? Соседними считаются клетки с общей стороной.

Ответ: 12.

Решение:

Отметим, что для выполнения условия необходимо, чтобы у каждого рыцаря среди соседей был хотя бы один лжец. Рассмотрим трехклеточные уголки таблицы, они помечены цифрами от 1 до 4. В каждом таком уголке должен быть хотя бы один лжец – если это не так для какого-то уголка, то во всех трех его клетках стоят рыцари, и рыцарь в угловой клетке говорит неправду.

1	1	4	4
1			4
2			3
2	2	3	3

Значит лжецов не меньше 4. Тогда рыцарей не больше 12. Пример с 12 рыцарями показан на рисунке: каждый лжец окружен только рыцарями, возле каждого рыцаря есть и рыцари, и лжецы.

Р	Л	Р	Р
Р	Р	Р	Л
Л	Р	Р	Р
Р	Р	Л	Р

Критерии:

Полное решение – 7 баллов.

Только ответ – 0 баллов.

Показан пример с 12 рыцарями – 3 балла.

Показано, что рыцарей не больше 12 – 4 балла.