РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

2023

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА

Задача 1. *Есть два автомата. Один — Прибавитель — за рубль к введенному в него числу прибавляет некоторое положительное число (всегда одно и то же) и выдает результат. Другой — Умножитель — за рубль любое введенное в него число умножает на некоторое (всегда одно и то же, не обязательно такое же, как у Прибавителя) положительное число и выдает результат. При этом какой автомат Прибавитель, а какой — Умножитель, заранее неизвестно. Как за 1 рубль выяснить, какой автомат — Прибавитель, а какой — Умножитель?*

Ответ. За 1 рубль. ***Решение***. Выберем любой из двух автоматов и введем в него число 0. Умножитель в ответ выдаст 0, а Прибавитель — то положительное число, которое он прибавляет.

• За ответ без объяснения — *0 баллов*. Придумана идея с введением нуля, но он вводится в оба автомата — *3 балла*.

Задача 2. *Барон Мюнхгаузен проехал на коне 50 км. Он рассказывал потом, что потратил на весь путь 3 часа, причем его средняя скорость в первые два часа равнялась 20 км/ч и в последние два часа — тоже 20 км/ч. Могло ли случиться, что он сказал правду?*

Ответ. Могло. ***Решение.*** Так могло быть в случае, когда Мюнхгаузен первый и третий часы пути скакал со скоростью 10 км/ч, а второй час со скоростью 30 км/ч.

• Ответ «могло» без обоснования — *0 баллов*.

Задача 3. *Может ли биссектриса остроугольного треугольника быть вдвое длиннее его высоты, проведенной из той же вершины?*

Ответ. Не может. ***Решение.*** Проведем в остроугольном треугольнике ABC высоту AH и биссектрису AL. Если в прямоугольном треугольнике AHL гипотенуза AL вдвое длиннее катета AH, то его угол HAL равен 60 градусам. Но этот угол составляет часть угла, образованного биссектрисой угла BAC с одной из его сторон, который равен половине угла BAC остроугольного треугольника и потому меньше 45 градусов. Противоречие.

Задача 4. *Три числа таковы, что их сумма равна 0, а куб разности любых двух из них равен разности их кубов (взятых в том же порядке). Докажите, что среди этих чисел есть нуль.*

Решение. Обозначим наши числа через x, y и z. Пусть среди них нет нуля. По условию $0 = (x^3–y^3)–(x–y)^3 = (x–y)(x^2+xy+y^2–(x–y)^2) = 3xy(x–y)$. Так как x и y — не нули, то $x–y = 0$, то есть $x = y$. Аналогично доказывается, что $y = z$. Но если сумма трех одинаковых чисел равна 0, то каждое из этих чисел равно 0.

• Деление на выражение, которое может обращаться в 0, без отдельного рассмотрения случая, когда оно равно 0 — *не выше 2 баллов*.

Задача 5. *Клетки доски 5×5 покрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке так, что угловые клетки — белые. Петя и Вася (начинает Петя) по очереди ставят на пустые клетки доски фишки: Петя — на белые, Вася — на черные. При этом нельзя ставить фишку на клетку рядом с фишкой соперника. Проигрывает тот, кто не может поставить очередную фишку без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. ***Решение.*** Первым ходом Петя ставит фишку в центральную клетку доски. После этого Вася может ходить только на черные клетки, находящиеся в четырех квадратах 2×2, расположенных в углах доски. Вторым и третьим ходом Петя должен поставить по фишке в любые два из этих квадратов (что, очевидно, возможно). Вася при такой игре Пети сможет сделать только четыре хода в два оставшихся квадрата, а Петя может сделать еще по одному ходу в каждый из занятых им квадратов, и выиграть на пятом ходу.